奥林匹克数学竞赛解谜

高中部份

康纪权



西南师范大学出版社

责任编辑：赵宏量
封面设计：江能咏
插　　图：傅培云

走向世界的窗口

奥林匹克数学竞赛解谜

（高 中 部 分）

康 纪 权

西南师范大学出版社

1990 年·重庆

奥林匹克数学竞赛解谜（高中部分）

康纪权　编著

西南师范大学出版社出版

（重庆　　北碚）

新华书店重庆发行所经销

重庆新华印刷厂印刷

*

开本787×1092　1/32　印张：14　字数：303千

1990年6月第一版　　1990年6月第一次印刷

印数：1—10,000

*

ISBN 7-5621-0405-0/G·255

定价：4.40元

前　言

许海峰一枪打破了"O"的纪录，奥林匹克体育吸引着千家万户。相比之下，另一个奥运会——奥林匹克数学竞赛就鲜为人知了，为了进一步落实邓小平同志"三个面向"的指示，提高整个中华民族的数学水平，全国性的数学竞赛已空前活跃，数学奥林匹克正在吸引着越来越多的中学教师和学生。但是不少人或者对数学本身的偏见，或者缺乏对奥林匹克数学竞赛的了解，使之蒙上了一层神秘的面纱，而不敢问津。为了提高广大青少年中数学爱好者的参赛兴趣，使他们充满信心走向世界，进军数学奥运会，为国争光，必须解开奥林匹克数学竞赛之谜，这正是本书的宗旨。

本书是根据作者在省内外的数学竞赛研讨会或培训班上的讲授提纲和积累的大量资料整理而成的。它以专题讨论的形式较为系统地总结了参加中学数学竞赛的基本知识和基本方法，为参赛者提供了一把打开数学奥林匹克大门的钥匙。书末附录对数学奥林匹克大门的情况作了简要介绍，并分年级提供了部分赛前模拟题，供参赛者自我检查，也可供辅导老师参考。书中例子基本上选自国内外数学竞赛试题，以增强真实感和实用价值。本书拟分两册出版，第一册为初中数学内容，第二册为高中数学内容。

国内外的实践充分证明，抓好数学竞赛可以激发学习数学的兴趣，可以推动数学课外活动的开展，有利于提高学生

思想品德素质，拓广知识视野，开发智力，培养能力，有利于及早发现和培养拔尖人才，也有利于促使教师业务水平的提高，意义十分重大。我们欣喜地看到，在坚持四项基本原则和改革开放的大好形势下，各级奥林匹克学校象雨后春笋纷纷出现，为在全国范围内选拔培养优秀人才创造了良好条件，我国中学生数学竞赛水平正在迅速提高。我们相信：数学奥林匹克将和体育奥林匹克一样，受到越来越多的人的重视和欢迎。

限于编者水平及资料限制，书中可能存在不妥之处，请同行和数学爱好者们批评指正。

编　　者

1989年10月

目　录

第　一　讲

数学竞赛中的解题策略

解题，不同的专家教授、数学工作者有其不同的解题观：

美国数学家加涅认为：当我们碰到问题情境时，我们或是原封不动地搬用先前学过的原理，或是组合若干原理从而发现新原理来解决问题。

苏联学者弗里德曼认为解题应由分析题意、作出图示、找解法、进行解、检验解、讨论、陈述解、分析解等共八步。

我国一些数学工作者把解题分为五步：认真审题、转化条件；紧扣条件，展开思路；运用分析、执果索因；严格推证，规范表达；自觉检验，发展提高。

美国数学教育家玻利亚认为解题应有四个步骤：分析问题；拟好计划；实行计划；验算所得。他大声疾呼：某些问题的解决，关键在于某一程序，某种行动的次序。

综观上述各家之谈可以看出，虽然他们的说法各异，但其共同点都是要安排出解题顺序，也就是要制定一个我们所谓的解题策略。

正确认识思维和解题的关系，才能正确制定解题策略，苏联心理学家吉洪米诺夫说：在心理中，思维被看作是解题活动；日本基石精一说：从广义说，思维是对问题情境作出解决办法所经历过程的总称。这就是说，制定解题策略从本

质上讲，就是进行符合逻辑的思维活动，不能乱想，更不能幻想。这里，我们谈谈数学竞赛中的几种解题策略。

一、抓住特征，攻其要害

如同世界上各种不同事物都有自己的特征一样，数学竞赛试题也有自己的结构、状态等特征。重视捕捉试题的特征，攻其要害，寻求巧解，是制定解题良策的一个主要源泉。

（一） 数量特征

例1 （第三届美国数学邀请赛试题）

设a，b与c为正整数，且满足等式$c=(a+bi)^3-107i$，其中$i^2=-1$，求c的值。

思考：已知式易化为

$$(a^3-3ab^2-c)+(3a^2b-b^3)i=107i.$$

于是
$$a^3-3ab^2-c=0 \quad (1)$$
$$3a^2b-b^3=107 \quad (2)$$

这是由两个等式(或方程)求a，b，c三个未知数的特殊问题，它启发我们去寻找特征量。不难发现107是质数的数值特征。于是由(2)有$b(3a^2-b^2)=1\times107$，即$b=1$或$b=107$(经验算$b=107$不合，舍去)，故可得$a=6$，代入(1)得$c=198$。

例2 （83年瑞典奥林匹克竞赛题）

1，2+3，4+5+6，7+8+9+10，……。

求第n组的和。

思考：要求第n组的和，显然需要知道前$n-1$组的项数，抓住这一数量特征，问题不难解决。事实上，因为前$n-1$组的项数为

$$1+2+3+\cdots+(n-1)=\frac{1}{2}n(n-1).$$

于是第n组的和为

$$\left[\frac{1}{2}n(n-1)+1\right]+\left[\frac{1}{2}n(n-1)+2\right]+\cdots$$

$$+\left[\frac{1}{2}n(n-1)+n\right]=\frac{1}{2}n^2(n-1)+\frac{1}{2}n\cdot$$

$$(n+1)=\frac{1}{2}n(n^2+1).$$

例 3 （第十六届加拿大数学奥林匹克试题）

任给七个实数，证明其中有两个数，称为x，y满足

$$0\leqslant\frac{x-y}{1+xy}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

思考： 注意到$0,\frac{1}{\sqrt{3}}$的数量特征和$\frac{x-y}{1+xy}$的结构特征，可用换元法转化为证$\operatorname{tg}0\leqslant\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\leqslant\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$，进而转化为求证$0\leqslant\alpha-\beta\leqslant\frac{\pi}{6}$，这易由抽屉原则来获得.

事实上，在 7 个实数中，据抽屉原则至少有 4 个数同非负或同非正.

不妨设有 4 个数同为非负数，记作$\operatorname{tg}\alpha_1$，$\operatorname{tg}\alpha_2$，$\operatorname{tg}\alpha_3$，$\operatorname{tg}\alpha_4$，这里$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$，$\alpha_4$皆为锐角或0.

于是，在$\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$，$\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$，$\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$中，再根据抽屉原则知至少一个区间内应含有两个角，不妨记$\alpha_1<\alpha_2$且α_1、α_2落在同一区间，有$0\leqslant\alpha_2-\alpha_1\leqslant\frac{\pi}{6}$，若令$y=\operatorname{tg}\alpha_1$，$x=\operatorname{tg}\alpha_2$，

则有 $\mathrm{tg}0 \leqslant \mathrm{tg}(\alpha_2-\alpha_1) \leqslant \mathrm{tg}\frac{\pi}{6}$， 即$0 \leqslant \frac{x-y}{1+xy} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$.

（二） 式的结构特征

例 1 （第一届美国数学邀请赛（$AIME$）试题）

设两个复数x，y的平方和是7，其立方和是10，$x+y$可能取的实数值中最大的是几？

思考：已知$x^2+y^2=7$，$x^3+y^3=10$。因为要求出$x+y$而不是x或y，于是把前面的方程改写为

$$\begin{cases} x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=7 \\ x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=10 \end{cases} \tag{1}$$

注意到(1) 式的对称结构特征，故设

$$s=x+y, \qquad p=xy \tag{2}$$

将(2)代入(1)得到

$$\begin{cases} s^2-2p=7 \\ s^3-3ps=10 \end{cases} \tag{3}$$

再从前一方程解出p，代入后一方程可得

$$s^3-3s\left(\frac{s^2-7}{2}\right)=10$$

化简得 $$s^3-21s+20=0 \tag{4}$$

显然$s=1$是(4)的一个根，于是有

$$(s-1)(s^2+s-20)=0$$

即 $$(s-1)(s-4)(s+5)=0。$$

可见，$s=x+y$的值都是实数，最大者为 4 。

值得一提的是，以上的推理中有一个跳跃。(1) 的任何解经过替换当然是(4) 的解。但是，我们必须说明(4) 的最大实根也是这样得来的，即不是增根.还可更进一步说明(4)

的每一个根都不是增根。这个逆命题不是自动成立的，因为方程组不是线性的。事实上，任给一个满足(4)式的s，令$p=\frac{s^2-7}{2}$，则由(4)推出(3)。其次，对于这一对(s, p)必然存在一对(x, y)满足(2)，即是$z^2+sz+p=0$的二根(可能是复数)。最后，把(2)代入(3)就回到了(1)也就是说，存在(1)的一组解(x, y)使得$x+y=s$。

例2 (全俄中学生数学奥林匹克第三阶段试题)

复原等式$\overline{x5}\cdot\overline{3yz}=7850$中的数字$x, y, z$。

思考一：由所给等式的结构有 $300\leqslant\overline{3yz}<400$

且 $19<7850\div400<\overline{x5}\leqslant7850\div300<27$，得知$x=2$。

又 $\overline{3yz}==7850\div25=314$，则得$y=1$，$z=4$。

因此有 $x=2$，$y=1$，$z=4$。

思考二：因为$7850=2\times5^2\cdot157$，所以$\overline{x5}=5^2=25$，$\overline{3yz}=2\cdot157=314$，于是得到$x=2$，$y=1$，$z=4$。

例3 (85年奥——波数学竞赛题)

求出下列方程组的所有实数解x、y：

$$\begin{cases} x^4+y^2-xy^3-\frac{9}{8}x=0 & (1) \\ y^4+x^2-yx^3-\frac{9}{8}y=0 & (2) \end{cases}$$

思考：由所给方程组的结构，我们易于想到分别就$x=y$与$x\neq y$两种情形加以讨论。

第一，若$x=y$，则可解得

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = \dfrac{9}{8} \\ y_2 = \dfrac{9}{8}. \end{cases}$$

第二，若$x \neq y$，易知此时x、y均不为零（因为二者只要其一为零，则必都等于零），所以我们可以记 $y = kx(k \neq 0, k \neq 1)$。于是有

$$\begin{cases} x^4 + k^2x^2 - k^3x^4 - \dfrac{9}{8}x = 0 & (3) \\ k^4x^4 + x^2 - kx^4 - \dfrac{9}{8}kx = 0 & (4) \end{cases}$$

$k \cdot (3) - (4)$，并约去x^2，得

$$2k(1 - k^3)x^2 + (k^3 - 1) = 0 \qquad (5)$$

由于$k \neq 1$且为实数，则由(5)知

$$x = \frac{1}{\sqrt{2k}}, \qquad \text{从而} \qquad y = \sqrt{\frac{k}{2}}.$$

将此代入(1)式可得

$$2\sqrt{2}k^3 - 9k^{\frac{2}{3}} + 2\sqrt{2} = 0$$

由此解得 $k_1 = 2$，$k_2 = \dfrac{1}{2}$，故知

$$\begin{cases} x_3 = \dfrac{1}{2} \\ y_3 = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_4 = 1 \\ y_4 = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

经验证知，上述两组解也满足方程组。

（三）图形特征

例1 （第37届美国中学竞赛题）

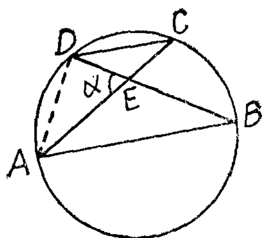
如图1-1．AB是圆的直径，CD是平行于AB的弦，且AC和BD相交于E，$\angle AED=\alpha$，则$\triangle CDE$和$\triangle ABE$的面积之比是(　　　)

(A) $\cos\alpha$；(B) $\sin\alpha$；(C) $\cos^2\alpha$；(D) $\sin^2\alpha$；(E) $1-\sin\alpha$。

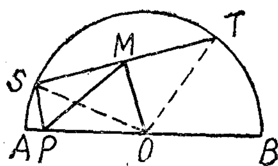
思考：观察图形有 $\triangle CDE\sim\triangle ABE$，连结 AD 有 $\angle ADE=90°$ 的图形特征．因此

$$S_{\triangle CDE}:S_{\triangle ABE}=DE^2:AE^2=\cos^2\alpha$$

因此应选答案(C)．



(图1-1)



(图1-2)

例2　(86年加拿大竞赛题)

定长的弦ST在一个以AB为直径的半圆周上滑动，M是ST的中点，P是S对AB作垂线的垂足。

求证：不管ST滑到什么位置，角SPM是一定角．

思考：如图1-2．设O为半圆的中心，连结OS与OT，可见图形的一个明显特征是$\angle SOT$是一个定角，从而$\angle SOM$也是一个定角。

又由题设知道S、P、O、M共圆，因而

$$\angle SPM = \angle SOM$$

则知 $\angle SPM$是一定角.

例3 （第二十届全苏中学生数学奥林匹克试题）

点M在锐角三角形 ABC的 AC边上. 作 $\triangle ABM$和$\triangle CBM$的外接圆. 问当M点在什么位置时,两外接圆公共部分的面积最小.

思考：如图1-3. 设O、O_1分别是$\triangle ABM$与 $\triangle CBM$外接圆的圆心. 图形特征表明，两外接圆的公共部分的面积正是两个以BM为公共弦的弓形面积之和. 因而只须考虑何时弓形面积最小。

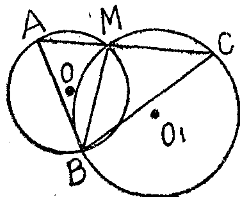
注意到 $\angle BOM = 2\angle BAM =$ 常数，

$\angle BO_1M = 2\angle BCM =$ 常数.

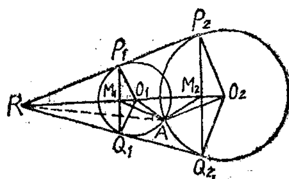
因此，研究当弓形弧所对的圆心角固定时，弓形面积与弓形弦的关系. 设圆心角为α，弓形弦长为b，那么弓形的面积为

$$\frac{b^2(\alpha - \sin\alpha)}{4 - 4\cos\alpha}.$$

由此可见，下图中若BM越小，则每个弓形的面积越小. 所以当BM是$\triangle ABC$的高，即$BM \perp AC$，M为垂足时，两外接圆公共部分的面积最小.



（图1-3）



（图1-4）

例4 （第24届国际数学奥林匹克试题）

设同平面上二不等圆C_1，C_2(其圆心分别为O_1，O_2)相交于两点，其交点之一为A. 又设二公切线分别切圆C_1于P_1，Q_1；切圆C_2于P_2，Q_2，而M_1，M_2分别为P_1Q_1和 P_2Q_2的中点，求证$\angle O_1AO_2=\angle M_1AM_2$.

思考：如图1-4. 由二圆不等，二公切线必交于一点R，显然有R，O_1，O_2三点共线. 连接 RA. 图形特征表明$\triangle OAM_1\sim\triangle O_1RA$；$\triangle O_2AM_2\sim\triangle O_2RA$(事实上有$O_1A^2=O_1P_1^2=O_1M_1\cdot O_1R$；$O_2A^2=O_2P_2^2=O_2M_2\cdot O_2R$)，从而$\angle O_1AM_1=\angle ARO_1=\angle O_2AM_2$，于是 $\angle O_1AO_2=\angle M_1AM_2$.

例5 （第28届国际数学奥林匹克试题）

锐角三角形ABC的顶点A的内分角线交BC于L，又交三角形的外接圆于N，过L分别作AB和AC边的垂线KL和LM，垂足是K和M，求证四边形$AKNM$的面积等于三角形ABC的面积.

思考：由图1-5的特征表明，只须证明$S_{\triangle LKN}+S_{\triangle LMN}=S_{\triangle LKB}+S_{\triangle LMC}$. 为此，作$NP\perp AB$于$P$，$NQ\perp AC$于$Q$，则$NP\parallel LK$，$NQ\parallel LM$，所以

$$S_{\triangle LKN}+S_{\triangle LMN}=S_{\triangle LKP}+S_{\triangle LMQ}$$

图1-5 的特征又表明只须证$S_{\triangle LBP}=S_{\triangle LCQ}$.

事实上，由题设有 $\angle BAN=\angle CAN$，$\angle APN=\angle AQN=90°$，则$BN=CN$；$PN=QN$. 于是

$$\triangle BPN\cong\triangle CQN，BP=CQ$$

又$LK=LM$，则$S_{\triangle LBP}=S_{\triangle LCQ}$.

例6 （第26届国际数学奥林匹克试题）

(图1-5)

(图1-6)

设ABC为三角形，一个以O为圆心的圆经过顶点A及C，又和线段AB及线段BC分别交于点K及N，K与N不同．$\triangle ABC$和$\triangle KBN$的外接圆恰相交于B和另一点M．求证：$\angle OMB$为直角．

思考：本题条件中包含三个圆周和七个点，这三个圆周把其中的六点连成一片，只有O点显得孤立，故可暂不考虑O点．在其余六点中，又以M点最为重要，因为它是所需证明的直角的顶点，故可从M点着手考虑．

证明：如图1-6，连MN，KN，MA，则由B、M、K、N共圆和N、K、A、C共圆，得

$\angle BMN=\angle BKN=\angle C$；

由B、M、A、C共圆得

$\angle BMA=180°-\angle C$，

则　$\angle NMA=\angle BMA-\angle BMN=180°-2\angle C$．

又连OA、ON，则从圆O得到

$\angle NOA=2\angle C$，

故　$\angle NOA+\angle NMA=180°$，

所以，N、M、A、O四点共圆．由于$OA=ON$，于是在这圆中 $\overset{\frown}{OA}=\overset{\frown}{ON}$，因而它们所对的圆周角相等：$\angle OMA=\angle OMN$．

则 $\angle OMN=\frac{1}{2}\angle NMA=90°-\angle C$，

$$\angle OMB=\angle OMN+\angle BMN=(90°-\angle C)+\angle C=90°.$$

这正是所要证明的．

上述证法所引用的知识都是我们现行初中几何课本中的常用的定理，计算也非常简单．证明过程能进行得如此顺利，很重要的一个原因是由于紧紧抓住关键点M，攻其要害，使问题迎刃而解．

（四）关系特征

例1 （86年全国竞赛题）

边长为a，b，c的三角形，其面积等于$\frac{1}{4}$，而外接圆半径为1，若$s=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$，$t=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$，则$s$与$t$的关系是

（A）$s>t$，（B）$s=t$，（C）$s<t$，（D）不确定．

思考：已知条件中有三边长、面积和外接圆半径，容易想到它们之间的关系．若用△表示三角形面积，便有$\triangle=\frac{1}{2}ab\cdot\sin C=\frac{abc}{4R}$，即$\frac{1}{4}=\frac{abc}{4}$，因而$abc=1$，则$s=\sqrt{a}+\sqrt{b}+$

$\sqrt{c}=\sqrt{\frac{1}{bc}}+\sqrt{\frac{1}{ac}}+\sqrt{\frac{1}{ab}}\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)+\frac{1}{2}$

$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=t$.故(A)不成立.又等号当且仅当$a$

$=b=c$时成立，而此时$a=1$，$\triangle=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\neq\frac{1}{4}$,故$s<$

t。即应选答案(C)。

例2 （87年武汉市数学夏令营试题）

已知x，$y\in N$，试求最大的y值，使得存在唯一的x值，

满足下列不等式：$\frac{9}{17}<\frac{x}{x+y}<\frac{8}{15}$.

思考：将原不等式变形为$\frac{15}{8}<\frac{x+y}{x}<\frac{17}{9}$. 注意到它与

$\frac{7}{8}<\frac{y}{x}<\frac{8}{9}$，又与$\frac{9}{8}<\frac{x}{y}<\frac{8}{7}$，再与$63y<56x<64y$的等价

关系，即

$$\frac{9}{17}<\frac{x}{x+y}<\frac{8}{15}\Longleftrightarrow\frac{15}{8}<\frac{x+y}{x}<\frac{17}{9}\Longleftrightarrow\frac{7}{8}<\frac{y}{x}<\frac{8}{9}\Longleftrightarrow$$

$$\frac{9}{8}<\frac{x}{y}<\frac{8}{7}\Longleftrightarrow 63y<56x<64y.$$

则将问题转化为求最大的开区间($63y$，$64y$) 使其仅包含一个56的整数倍. 由于区间长度为y，它含有$y-1$个整数。

如果$y-1\geqslant 2\times 56$，那么区间内必含有至少2个56的整数倍，这不符合要求，因而应有$y-1<2\times 56$，则$y\leqslant 112$.

当$y=112$时，我们有

$63\times112=126\times56<127\times56<128\times56=64\times112$。

显然$x=127$是满足此不等式的唯一的一个整数。

因此，$y=112$即为所求。

上面，我们思考了“求最大的开区间$(63y, 64y)$使其仅包含一个56的整数倍”这一问题，进而得出解答，其解法简捷明了。当然，亦可利用其它方法求解，例如，利用不等式证明中的比差法及较简单的整除理论也很容易得到解答。

因为x、$y\in N$，由$\frac{9}{17}<\frac{x}{x+y}<\frac{8}{15}\Leftrightarrow\frac{9y}{8}<x<\frac{8y}{7}$，

$$\triangle=\frac{8y}{7}-\frac{9y}{8}=\frac{y}{56},$$

令　$y=56k+l$，$k\in N$，$l=0$，1，2，…，55，

则　$\triangle=k+\frac{l}{56}$。

要使满足条件的x唯一，必须$l=0$时，$k=2$或$l\neq0$时，$k=1$，此时$y=112$或$56<y=56+l<112$。

故所求的y值为112，此时唯一的x为127。

例 3　（第 8 届国际中学生竞赛题）

证明：如果三角形的边a、b、c及对应角α、β、γ满足关系$a+b=(a\mathrm{tg}\alpha+b\mathrm{tg}\beta)\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}$，则此三角形是等腰三角形。

思考：欲证此题，必须应用三角形的边角关系。由于$\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}=\mathrm{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2}$，则题设关系为

$$a\left(1-\operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{tg}\alpha\right)+b\left(1-\operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{tg}\beta\right)=0,$$

即 $$a\cos\beta\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\alpha-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\alpha\right)+$$

$$b\cos\alpha\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\beta-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\beta\right)=0,$$

亦即 $$\sin\frac{\beta-\alpha}{2}(a\cos\beta-b\cos\alpha)=0.$$

由此，$\sin\frac{\beta-\alpha}{2}=0$，$\alpha=\beta$；

或者 $a\cos\beta=b\cos\alpha$。 (1)

根据正弦定理 $a\sin\beta=b\sin\alpha$ (2)

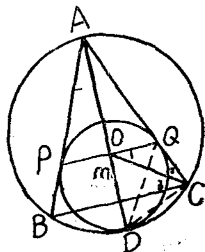
将(1)、(2)两式分别平方相加可得$a^2=b^2$，

从而 $a=b$。

综上两种情况，可知题设三角形是等腰三角形。

例 4 （第20届国际中学生竞赛题）

在$\triangle ABC$中，边$AB=AC$，有一个圆内切于$\triangle ABC$的外接圆，并且与AB、AC分别相切于P、Q，求证P、Q连线的中点是$\triangle ABC$ 的内切圆圆心。



（图1—7）

思考：如图1-7所示，O为$\triangle ABC$外接圆圆心，M为P、Q 连线的中点，要证M 是$\triangle ABC$的内切圆圆心，只证 M 是

$\triangle ABC$三内角平分线的交点.

由题设易知下列关系：

$AP=AQ$，直线$AOMD$为$\triangle ABC$外接圆的直径，$PQ\parallel BC$，$\angle QMD=\angle QCD=90^\circ$，$AD$为$\angle A$平分线.

由此不难证得$\triangle QMD\cong\triangle QCD$，有$QM=QC$，则$\angle 1=\angle 2$，进而$\angle 2=\angle 3$.于是知M为$\triangle ABC$中$\angle A$与$\angle C$的平分线的交点，从而M是$\triangle ABC$的内切圆圆心.

例 5 （第 3 届美国数学奥林匹克试题）

证明：若a、b、c是正实数，则

$$a^a b^b c^c \geqslant (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$$

思考一：注意到所证不等式与不等式

$$a^{2a-b-c}b^{2b-c-a}c^{2c-a-b}\geqslant 1$$

之间的关系，即欲证前者，只须证后者，此题便容易证明.

事实上，不失普遍性，可假设$a\geqslant b\geqslant c$，则

$$a^{2a-b-c}\geqslant b^{2a-b-c},$$

$$a^{2a-b-c}b^{2b-c-a}\geqslant b^{2a-b-c}b^{2b-c-a}=b^{a+b-2c}$$

$$a^{2a-b-c}b^{2b-c-a}c^{2c-a-b}\geqslant b^{a+b-2c}c^{2c-a-b}=\left(\frac{b}{c}\right)^{a+b-2c}\geqslant 1$$

当且仅当$a=b=c$时，上式等号成立.

思考二：借助关系$a^a b^b\geqslant a^b b^a$，易于证明.

事实上，$(a^a b^b)(b^b c^c)(c^c a^a)\geqslant(a^b b^a)(b^c c^b)(c^a a^c)$

即 $a^{2a}b^{2b}c^{2c}\geqslant a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}$.

两边再乘以$a^a b^b c^c$，则有

$$a^{3a}b^{3b}c^{3c}\geqslant(abc)^{a+b+c},$$

显然其立方根就是所要求的结果.

（五）命题特征

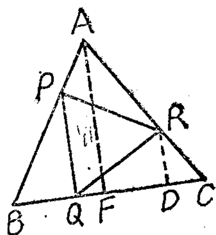
一般地说，命题结论中含有"一定有…"，"至少有…"等关键字句的，多宜采用反证法；命题呈现带自然数规律的，多宜采用数学归纳法。

例1 （第24届国际数学竞赛题）

设$\triangle ABC$是等边三角形，E是由线段BC、CA和AB上一切点（包括点A、B、C）所组成的集合。问对E的任一分为两个不相交子集的划分来说是否至少存在一个子集，其中包含某一直角三角形的三个顶点？证明你的结论。

思考：答案是肯定的。用反证法证明。

假若E有一个划分：$E=M\cup N$，$M\cap N=\phi$，使得M和N中都不含有任一直角三角形的三个顶点。则显然有M、N均非空。



（图1—8）

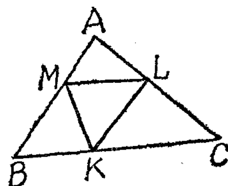
如图1-8．考虑三边上满足$AP=BQ=CR=\frac{1}{3}AB$的点P、Q、R。因为$BQ=\frac{1}{2}BP$，$\angle B=60°$，故$PQ\perp BC$；同理有$QR\perp CA$；$RP\perp AB$。因为在P、Q、R三点中，至少有两点属于同一子集M或N。为确定起见，不妨设P、$Q\in M$。由$PQ\perp BC$，M不含任一直角三角形之三顶点，推出边BC上所有点，除掉Q，都不能属于M，因此必属于N。作$RD\perp BC$，因D、$C\in N$，N也不含任一直角三角形的三顶点，推出$R\in M$。再由$RP\perp AB$，$QR\perp AC$，同理可得边

AB、AC上所有点，除掉R、P，都属于N，这当然是不可能的。例如作$AF\perp BC$，则直角三角形AFC的三顶点均属于N，矛盾于最初的假设，故命题得证。

例2 （第8届国际数学竞赛题）

在$\triangle ABC$的AB、BC和CA边上分别取点M、K、L（跟顶点不重合）。证明：三角形MAL、KBM、LCK中至少有一个的面积不超过$\triangle ABC$面积的四分之一，

思考：如果$\triangle MAL$、$\triangle KBM$、$\triangle LCK$的面积都大于$\triangle ABC$面积的$\frac{1}{4}$.则三者之积便大于$\triangle ABC$面积的$\left(\frac{1}{4}\right)^3$.



（图1—9）

由三角形的面积等于其两边及其夹角正弦的乘积的一半可知

$$\frac{S_{\triangle MBK}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{MB\cdot BK}{AB\cdot BC},\qquad \frac{S_{\triangle MAL}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{MA\cdot AL}{BA\cdot AC},$$

$$\frac{S_{\triangle KCL}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{KC\cdot CL}{AC\cdot BC}. \tag{1}$$

因而有 $$\frac{AM\cdot MB}{AB^2}\cdot\frac{BK\cdot KC}{BC^2}\cdot\frac{AL\cdot LC}{AC^2}>\frac{1}{64} \tag{2}$$

但$\sqrt{AM\cdot MB}\leqslant\frac{AM+MB}{2}=\frac{AB}{2}$,

从而$\frac{AM\cdot MB}{AB^2}\leqslant\frac{1}{4}$.

同理，$\dfrac{BK\cdot KC}{BC^2}\leqslant\dfrac{1}{4}$，　$\dfrac{AL\cdot LC}{AC^2}\leqslant\dfrac{1}{4}$.

则 $$\frac{AM\cdot MB}{AB^2}\cdot\frac{BK\cdot KC}{BC^2}\cdot\frac{AL\cdot LC}{AC^2}\leqslant\frac{1}{64}\qquad(3)$$

(3)与(2)矛盾，故(1)中至少有一个比值不大于$\dfrac{1}{4}$。即有一个小三角形的面积不超过$\triangle ABC$面积的$\dfrac{1}{4}$.

例3（79年湖北竞赛题）

已知a_1，a_2，…，a_8都是正数，且满足条件$\sum\limits_{i=1}^{8}a_i=20$；$\prod\limits_{i=1}^{8}a_i=4$。求证在$a_1,a_2$，…，$a_8$这 8 个数中至少有一个数小于1.

思考一：不妨设$0<a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_8$.

由 $\sum\limits_{i=1}^{8}a_i=20$，易知$a_8\geqslant\dfrac{20}{8}=\dfrac{5}{2}$.

假若$a_i\geqslant1(i=1,2,\cdots,8)$，则由$\prod\limits_{i=1}^{8}a_i=4$，易知$a_8\leqslant4$，因而 $\sum\limits_{i=1}^{7}a_i\geqslant20-4=16$，易得$a_7\geqslant\dfrac{16}{7}$.

于是由$a_i\geqslant1(i=1,2,\cdots,8)$，$a_7\geqslant\dfrac{16}{7}$，$a_8\geqslant\dfrac{5}{2}$知

$$4=\prod_{i=1}^{8}a_i\geqslant\frac{16}{7}\cdot\frac{5}{2}=\frac{40}{7}，矛盾.$$

则a_1，a_2，…，a_8中至少有一个小于1.

思考二：假若$a_k \geqslant 1(k=1, 2, \cdots, 8)$.

令$a_k = 1+\beta_k$，则$\beta_k \geqslant 0(k=1, 2, \cdots, 8)$且由

$$\sum_{k=1}^{8} a_k = \sum_{k=1}^{8}(1+\beta_k) = 8+\sum_{k=1}^{8}\beta_k = 20 \text{ 有} \sum_{k=1}^{8}\beta_k = 12.$$

$$\text{则} 4 = \prod_{k=1}^{8} a_k = \prod_{k=1}^{8}(1+\beta_k) = 1+\sum_{k=1}^{8}\beta_k + \cdots \geqslant$$

$$1+\sum_{k=1}^{8}\beta_k = 1+12 = 13, \text{ 即} 4 \geqslant 13 \text{矛盾}.$$

因此a_1，a_2，…，a_8中至少有一个小于1.

例 4 （第20届国际竞赛题）

一个国际社团的成员来自六个国家，共有成员1978人，用1，2，3，…，1978编号，证明该社团至少有一成员的顺序号数，与它的两个同胞的顺序号数之和相等，或是一同胞的顺序号数的二倍.

思考 用任何办法将集合$S=\{1, 2, 3, \cdots, 1978\}$分成六个两两不相交的子集$S_i(i=1, 2, \cdots, 6)$，一定有一个$S_i$，在$S_i$中能找得两个数$a$和$b$，使得

$$a=2b \tag{1}$$

或找到不同的x，y，z满足

$$x+y=z \tag{2}$$

因为(1)式可以理解为$a=b+b$，所以(1)和(2)可以合在一起说成：在S_i中一定有三个数x，y，z(不一定互不相同)满足(2)式.

下面，应用反证法证明上述结论.

假设存在$S=\{1, 2, 3, \cdots, 1978\}$的一种分法：$S_1, S_2, \cdots, S_6$，并且每一个$S_i$中都不可能找到$x$，$y$，$x$满足(2)。

因为$\frac{1978}{6}\approx 329.6$，所以一定存在一个$S_i$，它至少含有330个数，不妨设$S_1$至少含330个数：$a_1$，$a_2$，…，$a_{330}$，并设$a_1$是其中最小的，则

$$a_2-a_1,\ a_3-a_1,\ \cdots,\ a_{329}-a_1,\ a_{330}-a_1 \quad (3)$$

显然仍是1到1978中的数，并且互不相同。

如果这些差中有一个属于S_1，即如有

$a_K-a_1=a$，$a\in S_1$

则必有　$a+a_1=a_K$，即在S_1中找到三个数满足(2)式，与假设矛盾、因此(3)中329个差数都只能出现在S_2，$S_3, \cdots, S_6$中。

因为$\frac{329}{5}=65.8$，所以在S_2，S_3，…，S_6中一定存在一个S_i，它至少含有(3)中的66个差，不妨设S_2至少含有(3)中的66个差。

从S_2中任意选出66个(3)中的差：b_1，b_2，…，b_{66}，并设b_1是其中最小的，考虑下面的65个差数：b_2-b_1，b_3-b_1，b_4-b_1，…，$b_{66}-b_1$　(4)

显然，如果这65个差中有一个属于S_2，与前面一样，就可在S_2中找到三个数满足(2)，与假设矛盾。

另外，如果(4)中的65个差中有一个属于S_1，即存在

$b_K-b_1=a$，$a\in S_1$

这时，因为b_K与b_1都是(3)中的差，即

$$b_K=a_i-a_1, \qquad b_1=a_j-a_1$$

则 $a=b_k-b_1=(a_i-a_1)-(a_j-a_1)=a_i-a_j$

即 $a+a_j=a_i$

又在S_1中找到三个数满足(2)，这也与假设矛盾．因此(4)中的差只能属于S_3，S_4，S_5，S_6中．

用类似的办法可以推出：在S_3，S_4，S_5，S_6中一定有一个S_i(不妨设为S_3)至少含有(4)中的17个差，从S_3中任选17个差设为C_1，C_2，…，C_{17}，最小为C_1，考虑差 C_2-C_1，C_3-C_1，…，$C_{17}-C_1$　　(5)

与前面相似地证明(5)中的16个差中，如果有一个属于S_3或S_2或S_1，都会与假设相矛盾，因此，它们都只属于 S_4，S_5，S_6．

同理，S_4，S_5，S_6中有一个S_i(不妨设为S_4)至少含有(5)中的 6 个差，从S_4中任选 6 个差，设为d_1，d_2，d_3，…，d_6，并设最小者为d_1．考虑差 d_2-d_1，d_3-d_1，…，d_6-d_1

(6)

这 5 个差只能属于S_5与S_6，不妨设S_5包含(6)中的 3 个差：l_1，l_2，l_3．并设$l_1<l_2<l_3$．　　(7)

考虑 l_2-l_1，l_3-l_1

这两个差必属于S_6．

设 $f_1=l_2-l_1$，$f_2=l_3-l_1$，则 f_2-f_1这个差必属于S_1，S_2，…，S_6中的一个．然而，不管这个差属于哪一个S_i($i=1$，2，…，6)，都存在(与假设的)矛盾

例 5 （78年上海市竞赛题）

证明：不存在这样两个分数，它们的和与它们的积都是整数．

思考：假定存在这样的两个既约分数：$\frac{m_1}{n_1}$，$\frac{m_2}{n_2}$且$\frac{m_1}{n_1}+\frac{m_2}{n_2}=p$，$\frac{m_1}{n_1}\cdot\frac{m_2}{n_2}=q(p, q\in z)$

则 $\frac{m_1}{n_1}$，$\frac{m_2}{n_2}$是方程$x^2-px+q=0$的两个根。

从而 $\frac{m_2}{n^2}-p\frac{m}{n}+q=0$，$\frac{m^2}{n}=pm-qn$

（其中$\frac{m}{n}$表示$\frac{m}{n_1}$或$\frac{m_2}{n_2}$）

上式等号右边是一个整数，等号左边是一个既约分数，显然是矛盾的，因而命题得证。

例6 （87年新加坡中学数学竞赛题）

设$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$为$n$次整系数多项式，若$a_0$、$a_n$和$f(1)$都为奇数，证明$f(x)=0$无有理根。

思考：假设$\frac{p}{q}$是$f(x)=0$的有理根，其中p、q为整数且最大公约数$(p、q)=1$，于是有

$$a_0q^n+a_1q^{n-1}p+\cdots+a_np^n=0 \qquad (1)$$

由此知p整除a_0，q整除a_n，于是p、q都为奇数，从而$a_k q^{n-K}p^K$为奇数当且仅当a_k为奇数。由(1)式的左端是偶数，得$a_0+a_1+\cdots+a_n$是偶数，这与$f(1)$为奇数矛盾。

例7 （78年辽宁省竞赛题）

有一个n位数，将这个n位数的数字按逆序重新排列，得到一个新数（例如：将3248按逆序排列得到8423）。试证新数

与原数之差是 9 的整数倍.

今有甲、乙二人，如果甲从差中去掉一个数字，将剩余几个数字之和告诉乙，问乙如何能猜中去掉的这个数字？为什么？在什么情况下猜出的数字不是唯一的？为什么？

思考：(1) 设任一n位数的第1，2，…，n位上的数字分别为a_1，a_2，…，a_n。则

原数$p_n = a_n 10^{n-1} + a_{n-1}10^{n-2} + \cdots + a_2 \cdot 10 + a_1$

新数$Q_n = a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \cdot 10 + a_n$

应用数学归纳法证明$Q_n - P_n$是 9 的整数倍：

当$n = 2$时，$Q_2 - P_2 = 10a_1 + a_2 - (10a_2 + a_1) = 9(a_1 - a_2)$，命题成立.

假设$n = k$时命题成立，即

$Q_k - P_k = (a_1 \cdot 10^{k-1} + a_2 \cdot 10^{k-2} + \cdots + a_{k-1} \cdot 10 + a_k) - (a_k \cdot 10^{k-1} + a_{k-1} \cdot 10^{k-2} + \cdots + a_2 \cdot 10 + a_1)$可被 9 整除，

则当$n = k + 1$时有

$$
\begin{aligned}
Q_{k+1} - p_{k+1} &= (a_1 \cdot 10^k + a_2 \cdot 10^{k-1} + \cdots + a_k \cdot 10 + a_{k+1}) \\
&\quad - (a_{k+1} \cdot 10^k + a_k \cdot 10^{k-1} + \cdots + a_2 \cdot 10 + a_1) \\
&= a_1(10^k - 1) + a_2(10^{k-1} - 10) + \cdots + a_k(10 - 10^{k-1}) + a_{k+1}(1 - 10^k) \\
&= a_1(10^k - 1) + a_2 \cdot 10(10^{k-2} - 1) + \cdots - a_k \cdot 10(10^{k-2} - 1) - a_{k+1}(10^k - 1)
\end{aligned}
$$

因为$(10^k - 1)$，$(10^{k-2} - 1)$，…，$(10^{k-2} - 1)$，$(10^k - 1)$中的每一个都是 9 的倍数，所以$Q_{k+1} - P_{k+1}$可被 9 整除.

综上可知命题的第一部分成立。

(2) 我们知道一个整数是 9 的倍数，它的各位数字和也是 9 的倍数，反过来也对.

如果甲从差数和中去掉的数字是x，并知差数的数字和减去x等于a，由前面结论可知$a+x$一定是9的倍数。令$a+x=9q$（q是不小于0的整数），则$x=9q-a$是在〔0，9〕间的整数，即有$0\leqslant 9q-a\leqslant 9$。故当$a$确定时，$q$也随之确定。从而由$x=9q-a$可以求得唯一的$x$。例如从5175中，如果去掉一个数字，剩下的数字和$a=11$，由$x=9q-11$，$0\leqslant 9q-11\leqslant 9$，令$q=2$，得$x=9\times 2-11=7$。只有当$a$是9的倍数时，$x=0$或$x=9$。即在差数的数字和中减去去掉的数字差是9的倍数时，猜出的数字不是唯一的。

例 8　（第20届国际竞赛题）

已知a_1，a_2，…，a_k，…为两两各不相同的正整数，求证对任何正整数n，下列不等式成立：

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

思考：当$n=1$时显然有$\frac{a_1}{1^2}\geqslant 1$，命题真。

假设当n时不等式成立，则当$n+1$时，

（1）如果$a_{n+1}\geqslant n+1$，那么

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{a_k}{k^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}+\frac{a_{n+1}}{(n+1)^2}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\frac{n+1}{(n+1)^2}$$

$$=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k},$$

所论不等式成立。

（2）如果$a_{n+1}<n+1$，则必有一个a_i使得

$$a_i\geqslant n+1,\quad i<n+1.$$

由$a_i = a_{n+1} + a_i - a_{n+1}$有

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{a_k}{k^2}=\left(\sum_{k=1}^{i-1}\frac{a_k}{k^2}+\frac{a_{n+1}}{i^2}+\sum_{k=i+1}^{n}\frac{a_k}{k^2}\right)+\frac{a_{n+1}}{(n+1)^2}+$$

$$\frac{a_i-a_{n+1}}{i^2}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\frac{a_{n+1}}{(n+1)^2}+\frac{a_i-a_{n+1}}{(n+1)^2}$$

$$\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\frac{a_i}{(n+1)^2}$$

$$\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\frac{1}{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}.$$

于是，命题得证.

二　投石问路，以退求进

这里所谓的投石问路，是问题求解过程中的一种战术，也称为探索法，怎样探索？略举二三.

（一）寻求一种模式

当我们要解决一个一般性问题时，可以先就它的几个简单的特殊情况进行思考、分析、再从中归纳、发现问题的一般规律，从而获得解题的途径、这就是从特殊到一般的方法，也称为经验归纳法.

例1　（第11届国际竞赛题）

在一个平面上有n个点，而$n>4$，任何三个点都不在一直线上．求证：至少能找到C_{n-3}^{2}个凸四边形，它们的顶点是给定的点.

思考：因为$n>4$，故可先从$n=5$开始讨论，检验一下在$n=5$的情况下，命题是否正确。

由于$C^2_{5-3}=1$，所以在$n=5$时，只要证明至少存在一个凸四边形就行了。此时，无非有三种情况需要研究：

（1） 五个点是凸五边形的顶点；

（2） 五点中四点是凸四边形的顶点；

（3） 有三点A、B、C构成三角形，而其它两点D、E在三角形内部。

易知，（1）与（2）命题正确。对于（3），不难证明四边形$BCED$是凸四边形，故命题也真。

总之，在$n=5$时，本命题成立。

在此基础上，如果能证明：对任意给定的n个点($n>4$)，命题为真，问题就解决了。

假如给定的n个点组成一个点集，那么我们每次从n点中取出五个点组成一个子集，这是从n个元素中每次取出五个元素的组合问题。易知按此取法，我们可得到C_n^5个不同的子集，每个子集由五个点组成。上面已证，在每个子集中必有四点构成一个凸四边形。另一方面，同一个四边形最多能属于$n-4$个不同的五点子集合。例如$n=6$，有6个点，分别标记为1，2，3，4，5，6。不失一般性，把1，2，3，4看作组成的一个四边形，则它最多属于子集{1，2，3，4，5}和{1，2，3，4，5，6}，此时$n-4=6-4=2$。

因此，一般地说，所有这些凸四边形的总数不小于$f(n)=\frac{1}{n-4}C_n^5$。

现在只须证明，对$n>5$，有

$$f(n)=\frac{1}{n-4}C_n^5 \geqslant C^2_{n-3}=g(n).$$

事实上，首先证明$n=5$时本命题成立.

因为$C^2_{5-3}=1$，故只要证明至少存在一个凸四边形就行了. 对此，分三种情况讨论：

(1) 五个点是凸五边形的五个顶点，这时，五个点中的任意四个点都可以构成一个凸四边形，命题真；

(2) 五个点中的四个点是一凸四边形的顶点，不论题设的第五个点的位置如何，命题显然也对；

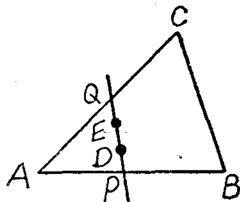
(3) 三点A，B，C构成一个三角形，其它两点D、E在三角形里面，由题设，D，E不是三角形的任何一个顶点，故可设直线DE分别交$\triangle ABC$的两边AB和AC于P与Q(图1—10)

因为对角线BE和CD在四边形$BCED$的内部，所以四边形$BCED$是一个凸四边形.

总之，对于平面上任意五个点，若其中没有任何三点共线，则至少有一个以给定的点为顶点的凸四边形.

现在给出任意n个点($n>4$)可构成C_n^5个不同的子集，每个子集由5个点所组成. 如上所证，在每个子集中必有四点构成一个凸四边形；反之，同一个四边形至多属于$n-4$个不同的五点子集. 因此，所有这些凸四边形的总数不少于$f(n)$

$=\frac{1}{n-4}C_n^5$.



(图1-10)

令$g(n)=C_{n-3}^2$，则

当$n=5$时，$f(5)=g(5)=1$；

当$n=6$时，$f(6)=g(6)=3$；

当$n\geqslant 7$时，有

$$\frac{f(n)}{g(n)}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdot 2}{120(n-3)(n-4)}=\frac{n(n-1)(n-2)}{60(n-4)}$$

$$=\frac{1}{60}\cdot\frac{n^3-3n^2+2n}{n-4}=\frac{1}{60}\left(n^2+n+6+\frac{24}{n-4}\right)$$

$$=\frac{1}{60}[n(n+1)+6]+\frac{2}{5(n-4)}>\frac{n(n+1)+6}{60}$$

$$\geqslant\frac{62}{60}>1.$$

从而　$f(n)>g(n)$.

故对所有大于4的n，有

$$f(n)=\frac{1}{n-4}C_n^5\geqslant g(n)=C_{n-3}^2$$

即，至少能找到C_{n-3}^2个凸四边形，其顶点为 已给的n个点。

例 2　（第 4 届美国数学邀请赛试题）

在掷硬币所得结果序列中，可以数出一个反面继以一个正面（记为“反正”）的次数，一个正面继以一个正面（记为“正正”）的次数，一个反面继以一个反面（记为“反反”）的次数，一个正面继以一个反面（记为“正反”）的次数。例如，掷硬币十五次的结果序列为

正正反反正正正正反正正反反反反，

其中有 5 个“正正”，3 个“正反”，2 个“反正”，4个“反反”.掷硬币十五次，有多少种不同的结果序列，它们都恰好有 2 个“正正”，3 个“正反”，4 个“反正”和 5 个“反反”？

思考：从研究序列的记数规律入手．

由对含“反正”比“正反”多一个，可以推断序列的第一个是反面，末一个是正面

再由 2 个“正正”、3 个“正反”、4 个“反正”、5 个“反反”可知正的计数有$2\times2+3+4=11$次，反的计数有$3+4+5\times2=17$次．序列第一个反及末一个正各只计数一次，其余的正或反都被计数两次，因此可推断序列中共有 6 个正，9 个反．

解：根据上述分析，我们可以设计如下的序列模型，在 9 个反和一个正中留出空位：

反○反○反○反○反○反○反○反○反○正在空位中放入其余 5 个正．考虑到序列含 2 个“正正”，有下列三种方案．

（1）若最末一个空位不放，5 个正分成 2、2、1 三组或 3、1、1 三组，都能保证有 2 个“正正”．各组分别插入前八个空位中的三个空位，共有 $2\times C_8^3\times C_3^1$种方法．

（2）若最末一个空位放入一个正，余下 4 个正分成 2、1、1 三组，也能使序列有 2 个“正正”．插入前八个空位有 $C_8^3\cdot C_3^1$种方法．

（3）若在最末一个空位放入两个正，则序列中已含 2 个“正正”，可从前八个空位中选出三个，将余下的三个正分别插入，有C_8^3种方法．

综上可知，合于条件的不同序列共有

$$2C_8^3C_3^1+C_8^3C_3^1+C_8^3=560(\text{种})。$$

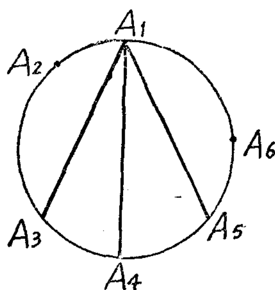
(二)画出一个图形

如有可能，把所要讨论的问题依照某种方式画出一个图形。由于图形的特征可能有助于理解题设条件及讨论对象之间的相互关系，从而较易探索出解题途径。

例 3 （1947年匈牙利数学竞赛，1953年putnam数学竞赛试题）

世界上任何六人，总有三人彼此认识或者彼此不认识。

思考：用一个圆周上的6个点A_1、A_2，…，A_6代表6人(图1-11)。若两人互相认识，就用红线连接，否则连以兰线。



(图1-11)

从A_1出发的五条线，至少有三条同色(据抽屉原则可知)，设有三条兰线A_1A_3，A_1A_4，A_1A_5。再分析A_3A_4，A_4A_5，A_5A_3的颜色。若三条中有一条是兰色的，问题得证(有三人互相认识)；若三条中无一条兰色的，问题也得证(A_3，A_4，A_5互不认识)。

所谓以退求进，是指由于某种条件的限制，暂时不能达到“进”的目的，就先“退”。所谓“进”，就是从题目的已知条件出发，逐步深入地解决，这对简单的题目是比较方便的。但遇到一些复杂的试题时，只是“进”有可能感到无门而入，更谈不上逐步深入解决。在此情况下，采取“退一步”的思考

策略，有可能将试题顺利解答.所谓"退"，就是把一个比较复杂的试题，"退"成最简单、最原始的问题，把这个简单的问题想通了，想透了，找出规律，然后再来一个飞跃，不仅能解决原来的问题，而且还可能进一步升华．这样，则从"退"中逐渐创造了"进"的条件，以实现"进"的目的．

例 4　（85年全国竞赛题）

某足球邀请赛有十六个城市参加，每市派出甲乙两个队．根据比赛规则，每两队之间至多赛一场，并且同一城市的两个队之间不进行比赛．比赛若干天后统计，发现除A市甲队外，其它各队已比赛过的场数各不相同，问A市乙队已赛过多少场？

思考：如果我们一开始就在十六个城市，32个队上纠缠，往往感到困难．于是先"退"到三个城市共 6 个队来分析。容易想到，一个队最多比赛四场．若各队比赛场数各不相同，所以除A市甲队外，其它 5 队比赛场次为 0， 1， 2， 3， 4．我们可以推得比赛 4 场和 0 场的为同一城市的两个队，而比赛 1 场和 3 场的为同一城市的两个队，所以A市乙队赛过 2 场．把这个简单问题想通了，对于十六个城市32个队的问题便极易解决了．

例 5　（62年北京市竞赛题）

把1600颗花生分给100只猴子，证明不管怎么分，至少有 4 只猴子得到的花生一样多．

思考：把问题退到"5 只猴子分花生"的情况来分析．

若 5 只猴子分别分得 0， 1， 2， 3， 4 颗花生，因为 $0+1+2+3+4=10$，故当 9 颗花生分给 5 只猴子时，一定至少有 2 只猴子分得同样多的花生．

将分析上述简单问题的结果用于试题上，解法自然而出．因为如果没有4只猴子分得的花生一样多，最经济的分法是．

3只得0颗，3只得1颗，……，3只得32颗，还有1只得33颗．

由于 $3\times(0+1+2+3+\cdots+32)+33=1617>1600$，所以，不管怎样分，至少有4只猴子分得的花生一样多。

例 6 （第37届美国中学数学竞赛(AHSME)试题）

置于暗室中的一只抽屉内装100只红袜子，80只绿袜子，60只兰袜子和40只黑袜子．一个少年从抽屉中选取袜子，每次取一只，但无法看到所取袜子的颜色，为了确保取出的袜子中至少包含有10双，最少必须取几只袜子？（一双袜子是指两只同颜色的袜子，但每只袜子只能一次用在一双之中）

(A) 21，(B) 23，(C) 24，(D)30，(E) 50．

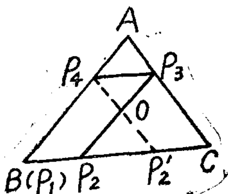
思考：我们把问题退到不考虑题中所设数据的地步，只是分析：10双袜子有20只，其中各种颜色的只数都是偶数．任取20只，最糟糕的情况是四色的只数全是奇数，这样就剩下4只不成双，但还有16只成8双。再取一只，必与剩下的一只再成1双；又取一只可能与剩下的另三只之一同色，那就又成1双。否则，最后再取1只就一定满足要求了．因此，最多只须取23只就能确保10双，也就是最少必须取23只才能确保10双。于是，应选答案(B)．（注意：此题容易误选答案(A)！）

例 7 （首届全国中学生数学冬令营竞赛题）

已知四边形$P_1P_2P_3P_4$的四个顶点位于$\triangle ABC$的边上，求证：四个三角形$\triangle P_1P_2P_3$，$\triangle P_1P_2P_4$，$\triangle P_1P_3P_4$，$\triangle P_2P_3P_4$

中至少有一个的面积不大于$\triangle ABC$的面积的四分之一.

思考：这个试题中的三角形内接四边形具有任意性，我们也可以尽量地退，先退到最简单的情形：三角形内接平行四边形，并且平行四边形有一个顶点与三角形的一个顶点重合．首先证明这种情形下命题的结论成立；再进到比较特殊的情形：三角形任意内接平行四边形，证明在这种情形下命题的结论正确；最后进到比较一般的情形：三角形内接任意的四边形，并分别不同情况，分别证明命题的结论正确.



（图1-12）

下面给出本题的一种证法.

证明：(1)先证最简单的情形.

四边形$P_1P_2P_3P_4$为平行四边形，且其中一个顶点与$\triangle ABC$的一个顶点相重合.

事实上，如图1-12所示：$\square P_1P_2P_3P_4$中必有一边不大于另一边，不妨设$P_1P_2 \leqslant P_2P_3$.

过P_4作$P_4P_2' \parallel AC$交BC于P_2'，交P_2P_3于O，则

$$\triangle OP_3P_4 \cong \triangle AP_3P_4,$$

$$S_{\square P_1P_1P_3P_4} = S_{\square P_2'P_4P_3C}.$$

于是$2S_{\square P_1P_2P_3P_4} = S_{\square P_1P_2P_3P_4} + S_{四边形OP_2'CP_3} + S_{\triangle OP_3P_4}$

$$= S_{\square P_1P_2P_3P_4} + S_{四边形OP_2'CP_3} + S_{\triangle AP_3P_4}$$

$$\leqslant S_{\triangle ABC}.$$

所以，$S_{\square P_1P_2P_3P_4} \leqslant \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$.

因此，以$\square P_1P_2P_3P_4$的任何三点为顶点的三角形的面积$\leqslant\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$，则命题成立。

（2）再证比较特殊的情形：$\triangle ABC$任意内接平行四边形$P_1P_2P_3P_4$。

如图1—13所示，过P_3作$P_3P_2' \parallel AB$交BC于P_2'，则

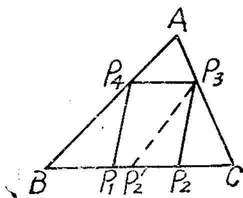
$$S_{\square P_1P_2P_3P_4}=S_{\square BP_2'P_3P_4}.$$

如前面(1)所证 $S_{\square BP_2'P_3P_4}\leqslant\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$.

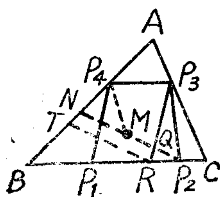
即 $S_{\square P_1P_2P_3P_4}\leqslant\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$.

从而命题成立。

（3）证明比较一般的情形：四边形$P_1P_2P_3P_4$为任意四边形，且P_1、P_2在BC上，P_3、P_4分别在AC和AB上。



（图1—13）



（图1—14）

如图1—14所示：我们依次令$P_1P_2P_3P_4$的内角为$\angle 1$，$\angle 2$，$\angle 3$，$\angle 4$。

由$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=360°$，易知必有两角之和不小于180°，不妨设$\angle 3+\angle 4\geqslant 180°$，$\angle 3+\angle 2\geqslant 180°$。

我们过P_2、P_4作$P_2M \parallel P_3P_4$，$P_4M \parallel P_2P_3$，且两平行线交于M，则M必落在$P_1P_2P_3P_4$的内部，则

$$S_{\triangle P_2P_3P_4}=\frac{1}{2}S_{\square P_2P_3P_4M}.$$

延长CM交AB于N，过P_3作$P_3R \parallel AB$交CN于Q，交BC于R，过R作$RT \parallel CN$交AB于T，则

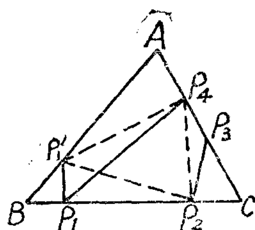
$$S_{\square P_2P_3P_4M}=S_{\square QP_3P_4N}<S_{\square RP_3P_4T}.$$

由(2)知 $$S_{\square RP_3P_4T}\leqslant\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}.$$

则 $$S_{\triangle P_2P_3P_4}\leqslant\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}.$$

于是，命题得证。

(4) 证明比较一般的情形：四边形$P_1P_2P_3P_4$为任意四边形，且P_1，P_2在BC边上，P_3、P_4在AC边上。



（图1—15）

如图1—15所示：P_1P_2与P_3P_4必有一边不大于另一边，不妨设$P_3P_4\leqslant P_1P_2$。

连接P_2P_4，过P_1作$P_1'P_1 \parallel P_2P_4$交AB于P_1'，连$P_1'P_4$，则

$$S_{\triangle P_1P_2P_4}=S_{\triangle P_1'P_2P_4},$$

$$S_{\text{四边形}P_1'P_2P_3P_4}=S_{\text{四边形}P_1P_2P_3P_4}.$$

而四边形$P_1'P_2P_3P_4$属于情形(3)，

则有 $$S_{\text{四边形}P_1'P_2P_3P_4}\leqslant\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}.$$

$$S_{\triangle P_2P_3P_4} \leqslant \frac{1}{4} S_{\triangle ABC}.$$

于是命题得证.

综合前面(1)、(2)、(3)、(4)便知本题得证.

三　动静结合，破除定势

大家知道，观察事物，分析问题，我们不能采用静止的、孤立的思考方法，而必须应用变化、发展、运动的观点去剖析和判断. 这样才能战而胜之. 解题，如同打仗，只要我们正确处理运动和静止间的辩证关系，巧妙地将动静有机结合，就能破除定势，将问题的本质一览无余地展现出来，不仅可以起到化难为易的作用，而且还能较为明快地解决问题.

例 1　(第38届美国中学数学竞赛题)

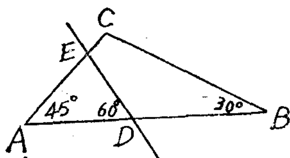
如图1—16. $\triangle ABC$的$\angle A = 45°$，$\angle B = 30°$，D在AB上，直线DE将$\triangle ABC$分成面积相等的两块(注：这图可能不确切，E也许是在CB上而不是在AC上). 则比$\frac{AD}{AB}$是

(A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$，(B) $\frac{2}{2+\sqrt{2}}$，(C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$，(D) $\frac{1}{\sqrt[3]{6}}$，

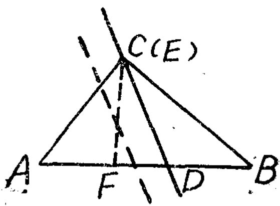
(E) $\frac{1}{\sqrt[4]{12}}$。

首先，我们注意题设中"注"的存在问题，它启发我们为确保解题的顺利进行，预先估计出直线DE的可能变化范围将是有益的.

移动图(1—16)中DE的位置使E与C重合，直线DE与



（图1—16）



（图1—17）

AB的夹角60°不变，如图1—17．设$\triangle ABC$的高$CF=1$．则

$AB=1+\sqrt{3}$，$AD=1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}$．于是

$$S_{\triangle ADE}:S_{\triangle ABC}=\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right):(1+\sqrt{3})=1:\sqrt{3}>\frac{1}{2}.$$

上面结果告诉我们点E只能落在AC上．

思考一． 考虑到直线DE的位置可变，但DE与AB的夹角$\angle ADE=60°$不变，故以B为顶点，BC为角的一边作$\angle CBF=30°$，交AC的延长线于F，将直线BF沿BA向左平行移动，经过C点后的某个时刻就会落在满足题设的位置上，不妨假设落在图1—18中的DE位置．这时有

$$\left(\frac{AD}{AB}\right)^2=\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABF}}=\frac{\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ABF}}.$$

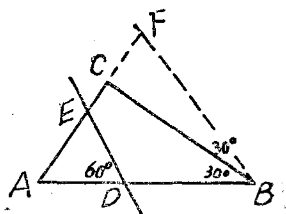
略解一． 不难证明$\triangle BCF$为等腰三角形，$BF=BC=2$．又据角平分线定理可求得

$$CF=\frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}},\ AC=\sqrt{2}.$$

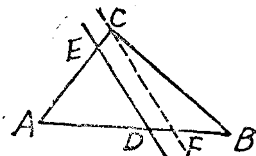
则 $$\frac{\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ABF}}=\frac{AC}{2AF}=\frac{\sqrt{2}}{2\left(\frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}+\sqrt{2}\right)}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}=\left(\frac{AD}{AB}\right)^2.$$

故 $\frac{AD}{AB}=\frac{1}{\sqrt[4]{12}}$。因而应选答案($E$)。



（图1—18）



（图1—19）

思考二。过点C作直线$CF\parallel ED$。向左平行移动CF，某个时刻将落在满足题设的位置上，不妨假设落在图 1—19中的DE位置。

这时 $$\left(\frac{AD}{AF}\right)^2=\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle AFC}}=\frac{\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AFC}}=\frac{AB}{2AF}$$

$$=\frac{AB^2}{2AF\cdot AB},$$

则有 $$\left(\frac{AD}{AB}\right)^2=\frac{AF}{2AB}.$$

略解二. 据图1—17有$AD=\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$，则

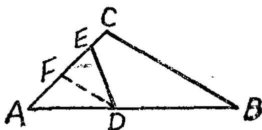
$AF=\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$. 又$AB=1+\sqrt{3}$，因而$\left(\frac{AD}{AB}\right)^2=\frac{1}{2\sqrt{3}}$，应选答案$(E)$.

思考三. 从相对运动的角度出发，伴随运动参照物的不同选择，动、静也随之发生变化. 不妨将问题中尚未确定的$\triangle ADE$看作是确定的如图1—20，DF是$\angle ADE$的平分线，将$\triangle ABC$看作尚未确定，而将问题转化为"将直线DF向右平移，直线DF与AE、AD的延长线交于C、B. 当$S_{\triangle ABC}$是$S_{\triangle ADE}$的两倍时，$\frac{AD}{AB}=?$". 由图1—20可知，$\left(\frac{AD}{AB}\right)^2=$

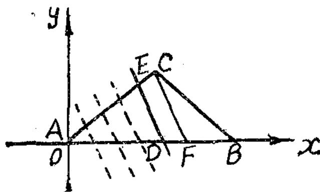
$$\frac{S_{\triangle ADF}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{S_{\triangle ADF}}{2S_{\triangle ADE}}=\frac{AF}{2AE}.$$

略解三. 设$\triangle ADF$的AD边上的高为1，则有$AF=\sqrt{2}$，$DF=2=DE$，在$\triangle ADE$中，据正弦定理有$AE=DE\cdot\frac{\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ}=\sqrt{6}$，$\left(\frac{AD}{AB}\right)^2=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{6}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$.

则 $\frac{AD}{AB}=\frac{1}{\sqrt[4]{12}}$，因而应选答案$(E)$.



(图1—20)



(图1—21)

思考四．考虑到直线DE与AB的夹角为60°不变，故DE的正确位置可看作是一簇与AB的夹角成60°的平行线复盖$\triangle ACF$，如图1—21．其中必有一条也仅有一条直线处在DE的正确位置上．联想解析几何中的平行直线系方程，故又有如下解法．

解法四．如图1—21，建立平面直角坐标系，设$C(1,1)$，则$B(1+\sqrt{3},\ 0)$．

直线$AB: y=0$；$AC: y=x$．又设直线$DE: y=-\sqrt{3}x+b$．不难求得

$$D\left(\frac{b}{\sqrt{3}},\ 0\right),\ E\left(\frac{b}{1+\sqrt{3}},\ \frac{b}{1+\sqrt{3}}\right).$$

又$S_{\triangle ABC}=2S_{\triangle ADE}$，有

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{\sqrt{3}}\cdot\frac{b}{1+\sqrt{3}}=\left(\frac{1}{2}\right)^2(1+\sqrt{3})$$

$$b=\sqrt[4]{3}\cdot\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}},\quad \frac{AD}{AB}=\frac{\frac{b}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}+1}=\frac{1}{\sqrt[4]{12}}$$

因此，应选答案(E)．

思考五．如图1—16，假设直线DE的位置已满足题设要求：$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{1}{2}$，由于$\triangle ABC$与$\triangle ADE$的三内角的大小不变，即$\angle A=45°$，$\angle B=30°$，$\angle C=105°$，$\angle ADE=60°$，$\angle AED=75°$，借助于正弦定理和三角形的面积公式，不难求出解答．

解法五．由$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{1}{2}$，有

$$\frac{AD \cdot AE}{AB \cdot AC}=\frac{1}{2} \qquad (*)$$

其中$AE=AD\cdot\frac{\sin 60°}{\sin 75°}$，$AC=AB\cdot\frac{\sin 30°}{\sin 105°}$

将上述AE、AC代入（＊）式得

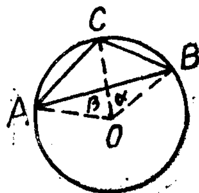
$$\frac{\sqrt{3}\,AD^2}{AB^2}=\frac{1}{2}$$

则 $\frac{AD}{AB}=\sqrt{\frac{1}{2\sqrt{3}}}=\frac{1}{\sqrt[4]{12}}$，因而应选答案$(E)$。

例 2 （第三届美国数学邀请赛试题）

在一个圆中，长度为2，3及4的三条平行弦所对的圆心角的弧度数分别是α、β及$\alpha+\beta$，其中$\alpha+\beta<\pi$，若$\cos\alpha$是一个正有理数，那么当$\cos\alpha$表示成一个既约分数时，它的分子分母之和是多少？

思考：倘若不加深思依题意直译作出⊙O中三条平行弦，其图形也只能是特殊图形。这是因为，就满足题设的三条平行弦与圆心的相对位置而言，多达数种，即使一一讨论作出图形，也与问题的突破无补。对此，我们考虑到长度为2，3，4的三条弦所对的圆心角的弧度数为α，β，$\alpha+\beta$且$\alpha+\beta<\pi$，



（图1-22）

故不论三条弦与圆心的相对位置处在哪种情况，总可通过旋转长度为2，3的两条弦所对的弧，使它们与长度为 4 的弦所

对的弧成图1—22所示，其中$AB=4$，$AC=3$，$BC=2$，这时三弦恰构成一个三角形ABC.

略解：在$\triangle ABC$中，根据余弦定理可求得

$$\cos\angle BAC=\frac{7}{8}.$$

又 $\angle BAC=\frac{\alpha}{2}$，再由倍角公式可求得

$$\cos\alpha=\frac{17}{32}.$$

因此，所求分子与分母的和等于49。

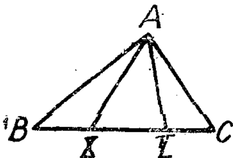
例3 （86年上海市竞赛题）

如图1—23，自$\triangle ABC$的顶点引两条射线交BC于X、Y，使$\angle BAX=\angle CAY$.

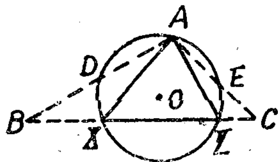
求证：$\frac{BX\cdot BY}{CX\cdot CY}=\frac{AB^2}{AC^2}$.

思考：题图1—23虽然给出，其实它仅是众多动态图形中的一个静态图形，这是因为满足题设的$\triangle ABC$可能是锐角、直角、钝角三角形.

变换问题着眼于角度，将$\triangle AXY$看作固定的（$0°<A<$



（图1—23）



（图1—24）

180°)，作它的外接圆O如图1—24．则$\triangle ABC$可看作是射线AX、AY绕点A向$\triangle AXY$的外侧等角速度旋转，两射线与直线XY的交点B，C与点A构成的三角形的集合．

略解：据割线定理有$BX \cdot BY = BD \cdot BA$，$CY \cdot CX = CE \cdot CA$．则

$$\frac{BX \cdot BY}{CX \cdot CY} = \frac{BD \cdot AB}{CE \cdot AC}$$

因$\angle DAX = \angle EAY$，则$DE \parallel BC$．

于是有$\dfrac{BD}{CE} = \dfrac{AB}{AC}$．

因而 $$\frac{BX \cdot BY}{CX \cdot CY} = \frac{AB^2}{AC^2}.$$

例 4 （第24届国际竞赛题）

设同平面上二不等圆C_1，C_2（其圆心分别为O_1，O_2）相交于两点，其交点之一为A．又设二外公切线分别切圆C_1于P_1、Q_1；切圆C_2于P_2，Q_2，而M_1，M_2分别为P_1Q_1和P_2Q_2的中点．

求证：$\angle O_1AO_2 = \angle M_1AM_2$．

思考一．由题意作出图1—25．就此静态图形分析：因为二圆不等，所以二外公切线必交于一点R，显然R、O_1、O_2三点共线．再连接RA，并利用相似三角形的性质，不难求证此题．

证法一、由图1—25，有

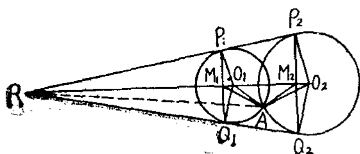
$O_1A^2 = O_1P_1^2 = O_1M_1 \cdot O_1R$．

则$\triangle O_1AM_1 \backsim \triangle O_1RA$．

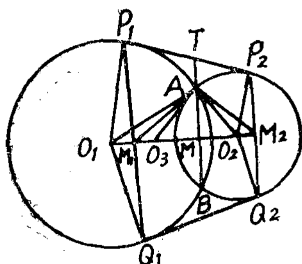
同理有 $\triangle O_2AM_2 \backsim \triangle O_2RA$．

因此，$\angle O_1AM_1 = \angle ARO_1 = \angle O_2AM_2$．

则得 $\angle O_1AO_2 = \angle M_1AM_2$.



（图1—25）



（图1—26）

思考二．显然，整个图形关于O_1O_2对称，M_1．M_2都在连心线O_1O_2上，并且P_1Q_1，AB、P_2Q_2都与O_1O_2垂直（图 1—26）．延长公共弦AB交P_1P_2于T．易证T是P_1P_2的中点，从而AB平分M_1M_2．通过轴对称，应用运动的观点，使图形"集中"，将分开的两个三角形（$\triangle O_2AM_2$与$\triangle O_1AM_1$）变为相邻的两个三角形，进而使用有关定理（如分角线定理）进行证明．

证法二，如图 1—26．由于

$$TP_1^2 = TA \times TB = TP_2^2,$$

所以T是P_1P_2的中点，AB平分M_1M_2．再以AB为对称轴，将$\triangle AO_2M_2$翻转，得到$\triangle AO_3M_1$，这时

$$\frac{O_1A}{O_3A} = \frac{O_1A}{O_2A},\quad \frac{O_1M_1}{M_1O_3} = \frac{O_1M_1}{O_2M_2}.$$

由于$\triangle O_1P_1Q_1 \backsim \triangle O_2P_2Q_2$，所以

$$\frac{O_1M_1}{O_2M_2} = \frac{O_1P_1}{O_2P_2} = \frac{O_1A}{O_2A}.$$

从而$\frac{O_1A}{O_3A}=\frac{O_1M_1}{M_1O_3}$，

AM_1是$\angle O_1AO_3$的平分线，

$\angle O_1AM_1=\angle M_1AO_3=\angle O_2AM_2$，

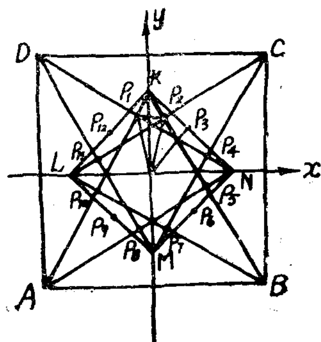
$\angle O_1AO_2=\angle O_1AM_1+\angle M_1AO_2$

$\quad=\angle O_2AM_2+\angle M_1AO_2=\angle M_1AM_2$。

即有$\angle O_1AO_2=\angle M_1AM_2$。

例 5 （第19届国际竞赛题）

在已知正方形$ABCD$内，作等边三角形ABK，CDM，BCL，DAN。试证：KL、LM、MN和NK四条线的中点及AK、BK、BL、CL、CM、DM、DN、AN八条线段的中点是一个正十二边形的12个顶点。



（图1—27）

思考一．如图 1—27．就此静态图形分析，只须证明：点P_1，P_2，…P_{12}都与点O等距且$P_1P_2=P_2P_3=P_3P_4=\cdots=P_{11}P_{12}=P_{12}P_1$

证法一．由题设有

$P_2P_7 \underline{\parallel} \frac{1}{2}BC$，$P_1P_8$

$\underline{\parallel}\frac{1}{2}AD$，

则$P_1P_8 \underline{\parallel} P_2P_7$，因而$P_1P_2P_7P_8$是矩形。

同理，$P_4P_5P_{10}P_{11}$也是矩形．

显然，上面两个矩形相等，其对角线交于O．于是，P_1，

P_2，P_4，P_5，P_7，P_8，P_{10}，P_{11}与点O等远

且$P_1P_2=P_4P_5=P_7P_8=P_{10}P_{11}$。

又KM与LN垂直且相等，则$MNKL$是正方形。所以，$OP_3=OP_{12}=OP_6=OP_9$，

再因$OP_3=OP_{12}$，$OP_1=OP_2$

$\angle P_1OP_{12}=45°-\angle P_1OK=45°-\angle P_2OK=\angle P_2OP_3$。

则　$\triangle P_1OP_{12}\cong\triangle P_2OP_3$，有$P_1P_{12}=P_2P_3$；

$\triangle OP_1P_{12}\cong\triangle OP_2P_3\cong OP_1P_2$，有

$OP_3=OP_{12}=OP_1$；

同理可证：$P_3P_4=P_4P_5=P_5P_6=\cdots\cdots$

于是有$P_1P_2=P_2P_3=\cdots=P_{11}P_{12}=P_{12}P_1$。

即知12个点都与点O等距离而且每相邻两点的连线都相等，所以构成一个正十二边形。

思考二．设正方形$ABCD$的中心为O，如图1—27所示，以O为原点，建立直角坐标系，借助解析法证明此题。

证法二．如图1—27．设正方形$ABCD$的边长为$2a$，则

$A(-a,\ -a)$，　　$B(a,\ -a)$，

$C(a,\ a)$，　　$D(-a,\ a)$。

因为四个等边三角形分别是以x轴，y轴为对称轴的对称图形，所以K、L、M、N四点分别在x轴．y轴上．而且

$$K(0,\ (\sqrt{3}-1)a),\quad L(-(\sqrt{3}-1)a,\ 0),$$

$$M(0,\ -(\sqrt{3}-1)a),N((\sqrt{3}-1)a,\ 0).$$

又设DN．CD的中点为P_1、P_2，KN的中点为P_3，根据中点坐标公式可得

$P_1\left(\frac{\sqrt{3}-2}{2}a, \frac{1}{2}a\right)$, $P_2\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}a, \frac{1}{2}a\right)$,

$P_3\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}a, \frac{\sqrt{3}-1}{2}a\right)$.

再由两点间距离公式可得

$|P_1P_2| = (2-\sqrt{3})a$, $|P_2P_3| = (2-\sqrt{3})a$.

则 $P_1P_2 = P_2P_3$.

由 $|OP_1| = \sqrt{2-\sqrt{3}}a$, $|OP_2| = \sqrt{2-\sqrt{3}}a$,

$|OP_3| = \sqrt{2-\sqrt{3}}a$.

有 $|OP_1| = |OP_2| = |OP_3|$.

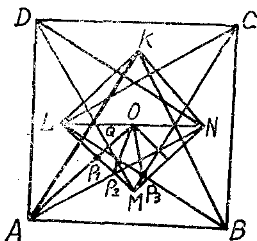
因为另外九条线段的中点分别是P_1,P_2,P_3的对称点，所以这12个点均在以O为圆心，$\sqrt{2-\sqrt{3}}a$为半径的圆上，且这12个点间距离相等。

因此，这12个点是正十二边形的12个顶点。

思考三． 设正方形的中心为O，当A绕O点旋转到B、C、D、A时，L旋转到了M．N、K，L，所以四边形 $KLMN$ 是正方形，以O为中心，并且 $DM \perp AN$（如图 1—28）。

又设DM与AN交于P_2，则由于DM是正$\triangle DAN$的高，所以P_2是AN的中点。

同理，BL与CM 的交点



（图1—28）

P_3是BL的中点。

容易看出，直线OA是整个图形的对称轴，OA与LM的交点P_1是LM的中点。只要证明

$$P_1P_2=P_2P_3,\quad \angle P_1P_2P_3=150°$$

就可以了。

证法三。如图1—28。关于OA对称的直线DM、BL交于轴OA上一点Q。在直角$\triangle QMP_3$中

$$\angle QMP_3=60°,\quad \angle MQP_3=30°,$$

又易知OM也是整个图形的对称轴，P_2，P_3关于OM对称，所以

$$MP_2=MP_3=P_2P_3=\frac{1}{2}MQ.$$

而在直角$\triangle QMP_1$中，斜边中线

$$P_1P_2=\frac{1}{2}QM.$$

故 $P_1P_2=P_2P_3$。

易知
$$\begin{aligned}\angle P_1P_2P_3&=\angle P_1P_2Q+120°\\&=2\angle P_1MP_2+120°\\&=\angle P_1MN-\angle P_2MP_3+120°\\&=30°+120°=150°.\end{aligned}$$

则 $P_1P_2=P_2P_3$，$\angle P_1P_2P_3=150°$，

由此，本题得证。

四　收缩分割，围而歼之

"收缩并分割，再围而歼之"，这是孙子兵法中的一种重要战术，也是我们解题的一种常用策略。下面列举的几条，正是这种军事思想在解题中的具体运用。

(一)放缩夹挤，步步逼近

通过放缩夹挤，限定变化范围，再步步逼近，直至解决问题。

例1 （63年南京市竞赛题）

工人老张经常在闲假时间在工地上收拾散落的螺丝钉，他总是把这些螺丝钉每100只包成一包．某日，他的小组接受了一项工作，这项工作的第一天，第二天都不需要螺丝钉，但第三天需用3只，第四天需用4只，第五天需用5只，……其余类推．老张就把所拾的螺丝钉拿出几包来使用，恰好完成这项工作，已知此项工作需要38天以上才能完成，而老张拿出的包数至少是5整包，但不到10整包．问此项工作要做几天？老张共拿出几包螺丝钉？

思考：假设此项工作需要做n天，老张拿出m包螺丝钉．由题意可知

$$3+4+5+\cdots+n=100m.$$

其中$n>38$，$5<m<10$

本题的困难在于：既不知n为何值，又不知m为何数．为此，我们采用放缩夹挤的办法，先确定n，再求出m的值．

事实上，有$\dfrac{(n-2)(n+3)}{2}=100m$，于是

$$1000<(n-2)(n+3)<2000.$$

显然，$n-2<45$。又知$n>38$，则

$$36<n-2<45. \qquad 即 \quad 38<n<47$$

根据要求，易知$n=42$，从而$m=9$．

答：此项工作要做42天，老张拿出9包螺丝钉．

例2 （79年天津市竞赛题）

设有三个正整数a，b，c满足下列条件：

(1) $10 \leqslant a < b < c \leqslant 30$；

(2) $a(2b-a)$与$c^2+20b-15a$的对数（以某正整数为底）分别为9与10。

试推算这三个整数。

思考：由题意有

$$\begin{cases} \log_K a(2b-a)=9 \\ \log_K (c^2+20b-15a)=10 \end{cases}$$

其中K为不等于1的正整数。

则 $\begin{cases} a(2b-a)=K^9 \\ c^2+20b-15a=K^{10} \end{cases}$

由条件(1) 和上述第二式，有

$K^{10} \leqslant 30^2+20\times 29-15\times 10=1330<3^{10}$。

因此 $1<K<3$，故$K=2$。

又由 $a(2b-a)=2^9$，根据因数分解的唯一性，可知$a=2^m$，其中m是正整数。

再由$10 \leqslant a \leqslant 30$，易知$a=16$适合题意，从而解得$b=24$，$c=28$。

因此，推算所得$a=16$，$b=24$，$c=28$。

例3 （75年美国纽约竞赛题）

求适合于$x^5=656356768$的整数x。

思考：因为656356768是一个偶数，所以它必有$2^5=32$这个因数。于是

$$656356768 \div 32 = 20511149。$$

令$x^5=2^5y^5=(2y)^5$，其中$y^5=20511149$。

由于$3200000<20511149<24300000$。

即　$20^5 < 20511149 < 30^5$,

则　　　$20 < y < 30$.

为了确定y值，下面采取步步逼近的办法.

由　20511149不是偶数，知$y \neq 22, 24, 26, 28$;

由　20511149末尾数字不是5和3，知$y \neq 25, 23$;

由　20511149的各位数字之和不是3的倍数知　$y \neq 21, 27$.

综上可知　$y = 29$，即$29^5 = 20511149$.

因此，$x = 2 \times 29 = 58$.

例4　（第19届国际竞赛题）

设a，b都是自然数，$a^2 + b^2$除以$a + b$时，商数为q，余数为r. 试求出所有数对(a, b)，使得$q^2 + r = 1987$.

思考：本题的难点在于：既不知a，b为何数，又不知q，r为何值. 先确定四者中的哪一个？成为解决问题的关键. 通过观察，易知从q着手. 事实上，由题意有

$$\frac{a^2 + b^2}{a + b} = q + \frac{r}{a + b} < q + 1, \quad r > 0, \quad a + b > r.$$

则当$q \geqslant 45$时，有$q^2 \geqslant 2025$.

由　$q^2 + r = 1987$　知$r \leqslant -48$与$r > 0$矛盾.

故　$q \leqslant 44$　　且$\dfrac{a^2 + b^2}{a + b} < 45$.　　　　　　　　（※）

当　$q \leqslant 43$时，$q^2 \leqslant 1849$，$r \geqslant 128$，$a + b > 128$.

设　$a \geqslant b$，则　$a \geqslant \dfrac{1}{2}(a + b)$.

若　$a \leqslant \frac{2}{3}(a+b)$，则$b \geqslant \frac{1}{3}(a+b)$．于是

$$\frac{a^2+b^2}{a+b} \geqslant \frac{\left[\frac{1}{2}(a+b)\right]^2+\left[\frac{1}{3}(a+b)\right]^2}{a+b}=\frac{13}{36}(a+b).$$

因为$a+b>128$，所以$\frac{a^2+b^2}{a+b}>46$与(＊)矛盾。

若　$a>\frac{2}{3}(a+b)$，则$\frac{a^2+b^2}{a+b}>\frac{\left[\frac{2}{3}(a+b)\right]^2}{a+b}=\frac{4}{9}(a+b)$。

由$a+b>128$　知$\frac{a^2+b^2}{a+b}>56$与(＊)矛盾。

故　$q>43$。于是$43<q\leqslant 44$。

因此　$q=44$，解得$r=41$。

由上可得　$a^2+b^2=44(a+b)+41$。

配方后得　$(a-22)^2+(b-22)^2=1009$。

最后解得　$\begin{cases}a_1=50,\\ b_1=37\end{cases}$　　$\begin{cases}a_2=50\\ b_2=7,\end{cases}$

$\begin{cases}a_3=37\\ b_3=50,\end{cases}$　　$\begin{cases}a_4=7\\ b_4=50.\end{cases}$

（二）化整为零，各个击破。

按照某种规则将所论问题进行分类，使之化整为零，然后将各类问题逐一讨论，做到各个击破，最后解决问题。

例 5　（58年武汉市竞赛题）

已知任意一个整数，将其数字相加，其和可为一位数或多位数。如不是一位数，又将其和的数字相加，象这样做下去，最后得到一位数为止。若该一位数是2，3，5，6四数中的一个，那么原给的整数决不可能是正整数的平方或立方。

思考：因为任意的整数都可表示为$9n$，$9n\pm1$，$9n\pm2$，$9n\pm3$，$9n\pm4$（n是整数）之一，所以可将本题化为五种情形逐一讨论。

事实上，上面各数的平方可写作：

$(9n)^2=9K$，$(9n\pm1)^2=9K+1$，$(9n\pm2)^2=9K+4$，

$(9K\pm3)^2=9K$，$(9n\pm4)^2=9K+7$　　（$K=0$，1，2，…）。

各数的立方可写作：

$(9n)^3=9K$，$(9n\pm1)^3=9K+1$，$(9K\pm2)^3=9K+8$，

$(9n\pm3)^3=9K$，$(9n\pm4)^3=9K+1$　　（$K=0$，1，2，…）。

在这里可以看出，$9K$是可以为平方数或立方数，但上面所列的诸余数内，却没有2，3，5，6四个数，所以如题所云。

例6　（62年成都市竞赛题）

试证大于17元的元数为整数的款项只须用票面额为3元和10元的人民币就可支付，而不需添用其它票面额的人民币，也不需要找补。

思考：因为任何正整数都可用下列三种形式之一来表示：

（1）$3m$　　（m为正整数）；

（2）$3m+1$　　（m为非负整数）；

（3） $3m+2$ （m为非负整数）。

所以，先将本题分为三类，然后再逐一讨论。

事实上，若所表示的正整数大于17，则$m\geqslant 6$，即$m-6$为非负的整数。由此可见：

（1） 如果款项为$3m$元，则可单用 3 元币m张来支付；

（2） 如果款项为$3m+1$元，则因

$$3m+1=10+3m-9=10+3(m-3),$$

由$m\geqslant 6$知$m-3$为正整数，故这种款项可用10元币1张和 3 元币$m-3$张来支付；

（3） 如果款项为$3m+2$元，则因

$$3m+2=20+3m-18=10\times 2-3(m-6).$$

而$m-6$为非负整数，故这种款项可用10元币 2 张和 3 元币$m-6$张支付。

例 7 （63年北京市竞赛题）

已知多项式x^3+bx^2+cx+d的系数都是整数，并且$bd+cd$是奇数。证明：这个多项式不能分解为两个整系数多项式的乘积。

思考：因为$bd+cd$是奇数，则$b+c$与d都是奇数。于是可把问题分为两类：b为偶数，c为奇数；b为奇数，c为偶数，再逐一讨论，各个击破。

(i) b是偶数．c、d是奇数．

如果$f(x)=x^3+bx^2+cx+d$能分解成两个整系数多项式的乘积，便一定有一个一次因子．既然首项系数是 1，不妨设

$$(x+p)(x^2+qx+r)=x^3+bx^2+cx+d \qquad (1)$$

其中要求p、q、r都是整数。

比较两边的对应系数，得

$$pr=d=\text{奇数} \tag{2}$$

$$pq+r=c=\text{奇数} \tag{3}$$

$$p+q=b=\text{偶数} \tag{4}$$

从(2)断定p、r都是奇数，由此再从(3)来看，势必q是偶数，此与(4)矛盾。

(ii)c是偶数，b、d是奇数。可以同样地推出矛盾来。

综上可知，$f(x)$不能分解成整系数多项式之积。

(三)减元缩圈，战而胜之。

细心观察，提炼特征，减少变元，缩小包围圈，战而胜之。

例 8 （第二届东北三省数学邀请赛试题）

求出所有的正整数m、n，使得

$$(m+n)^m=n^m+1413.$$

思考：一个不定方程中含有两个未知数，直接求解，颇不易得。细心观察题设条件，便可知其特征：m不可能是偶数(否则，不论n为奇数还是偶数，$(m+n)^m=n^m+1413$的一端会是奇数，另一端却是偶数，得出矛盾)。进而减元求解。事实上，

当正整数m、n满足$(m+n)^m=n^m+1413$时，由于$(m+n)^m\geqslant m^m+n^m$，必有$m^m\leqslant 1413$，则知$m\leqslant 4$。又由于$1\leqslant m\leqslant 4$且m不能为偶数，因此m只可能是1或3。

当$m=1$时，对任何正整数n，不可能有

$$(m+n)^m=n^m+1413.$$

当$m=3$时，欲上式成立，n必须满足

$$(3+n)^3=n^3+1413,$$

即　　$n^2+3n-154=0$。

解得　$n=11$，$n=-14$(舍)

于是，要求的所有正整数m、n为$m=3$，$n=11$。

例 9　(第38届美国中学数学竞赛题)

若P是质数，且$x^2+px-444p=0$的两根都是整数，则

$(A)1<p\leqslant 11$，$(B)11<P\leqslant 21$，$(C)21<P\leqslant 31$，

$(D)31<p\leqslant 41$，$(E)41<p\leqslant 51$。

思考：将原方程变形为$x^2=p(444-x)$.可知x含质数p.不妨设$x=pt$(t为整数).

将$x=pt$代入原方程，整理得：

$$pt(t+1)=37\times 3\times 4$$

则　$p=37$，因而应选答案(D)。

第　二　讲

数学竞赛中的多项式问题

多项式不仅是中学数学的重要内容之一，而且也是代数学的一个基本概念，在高等数学以及许多科学技术问题中也常常用到它。因此，在国内外的数学竞赛中也有不少关于多项式的试题。

一、依据题设条件，确定多项式

在中学数学教材里，主要讲述的是实数集R上的多项式，特别是一元n次多项式：

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x_{n-2} + \cdots + a_1x + a_0$$

其中n是确定的自然数，$a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$是实数系数，$a_n \neq 0$，$x$是任何实数时，这个多项式都有确定的值。

如何依据题设条件，将试题要求的多项式确定出来，一般地讲，没有什么规律可循，只能具体问题具体分析。

例 1　（64年北京竞赛题）

已知某二次三项式当$x = \dfrac{1}{2}$时取得极值25；这个二次三项式的两根的立方和等于19，求这个二次三项式。

解法一：由第一个条件得知，这个二次三项式的首项系数不等于0，而且可以写作

$$a\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+25 \qquad (1)$$

令(1)式等于0，解得$x_1=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{25}{-a}}$，$x_2=\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{25}{-a}}$

于是　　$x_1+x_2=1, x_1x_2=\frac{1}{4}+\frac{25}{a}$.

所以　　$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2]$

$$=1-3\left(\frac{1}{4}+\frac{25}{a}\right)=\frac{1}{4}-\frac{75}{a}.$$

由第二个已知条件，得 $\frac{1}{4}-\frac{75}{a}=19$.

则得　$a=-4$，将它代入(1)式并化简，有$-4x^2+4x+24$. 因为二次项系数是负的，所以25是极大值.

解法二： 假设二次三项式是ax^2+bx+c.因为它有极值，所以$a\neq0$.又因$x=-\frac{b}{2a}$时它出现极值，所以$-\frac{b}{2a}=\frac{1}{2}$，即　$b=-a$。

既然$b=-a$，这二次三项式便可写作

$$ax^2-ax+c \qquad (2)$$

因为$x=\frac{1}{2}$时，它等于25，所以$\frac{a}{4}-\frac{a}{2}+c=25$

即　$-a+4c=100$ 　　(3)

从(2)式来看，假设它的两根是x_1，x_2，那么

$x_1+x_2=1$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$.

由此，$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=1-\frac{3c}{a}$。

由第二个已知条件得 $1-\frac{3c}{a}=19$，解得

$$c=-ba \qquad (4)$$

代入(3)，求得 $a=-4$

再从(1)和(4)求得 $b=4$，$c=24$

因此，所求的二次三项式是$-4x^2+4x+24$，而且25是极大值。

例 2 （78年安徽竞赛题）

已知某二次 三项 式在$x=\frac{1}{2}$时取极小值$-\frac{49}{4}$，它的两个根的四次方的和等于337，求此二次三项式。

解法一：由第一个条件得知，这个二次三项式的首项系数不等于0，因此可把二次三项式写为

$$a\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{49}{4} \qquad (1)$$

因为$x=\frac{1}{2}$时，它取极小值，所以$a>0$。

令 $a\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{49}{4}=0$

设此方程的两个根为x_1和x_2，则有

$$x_1+x_2=1,\quad x_1x_2=\frac{a-49}{4a} \qquad (2)$$

于是 $x_1^4+x_2^4=(x_1^2+x_2^2)^2-2x_1^2x_2^2$

$=[(x_1+x^2)^2-2x_1x_2]^2-2x_1^2x_2^2$

$$=(1-2x_1x_2)^2-2x_1^2x_2^2.$$

再令$x_1x_2=y$，则由第二个条件得

$(1-2y)^2-2y^2=337$，即　$y^2-2y-168=0$。

解得$y_1=-12$，$y_2=14$。

由$x_1x_2=y_1=-12$ 及 $x_1x_2=\frac{a-49}{4a}$，得

$$-48a=a-49，即a=1；$$

由　$x_1x_2=y_2=14$　及　$x_1x_2=\frac{a-49}{4a}$，得

$$56a=a-49，即\quad a=-\frac{49}{55}<0（舍）$$

由上得知所求二次三项式为$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{49}{4}$，即$x^2-x-12$

解法二：设此二次三项式为ax^2+bx+c，因为它有极值，所以$a\neq0$，由于$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c$。当$x=-\frac{b}{2a}$时它取极值，故有$-\frac{b}{2a}=\frac{1}{2}$，即$b=-a$。因此，这个二次三项式可写为

$$ax^2-ax+c \tag{1}$$

因为在$x=\frac{1}{2}$处它取极小值$-\frac{49}{4}$，所以$a>0$，而且

$-\frac{b^2}{4a}+c=-\frac{49}{4}$，即$-\frac{a}{4}+c=-\frac{49}{4}$，

$$-a+4c=-49 \tag{2}$$

若设(1)的两个根为x_1和x_2，则有

$$x_1+x_2=1,\quad x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

由此得

$$\begin{aligned}x_1^4+x_2^4&=(x_1^2+x_2^2)^2-2x_1^2x_2^2\\&=[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]^2-2x_1^2x_2^2\\&=(1-2x_1x_2)^2-2(x_1x_2)^2\\&=\left(1-\frac{2c}{a}\right)^2-\frac{2c^2}{a^2}\\&=1-\frac{4c}{a}+\frac{2c^2}{a^2}.\end{aligned}$$

根据假设，有$1-\frac{4c}{a}+\frac{2c^2}{a^2}=337$.即$\frac{2c^2}{a^2}-\frac{4c}{a}=336$ (3)

由(2)得$c=\frac{a-49}{4}$，代入(3)解得

$a=1$ 及$a=-\frac{49}{55}$(不合$a>0$的要求)。

所以$a=1, c=\frac{a-49}{4}=-12$。

因此，所求二次三项式为x^2-x-12。

例 3 （86年全国竞赛题）

已知数列a_0，a_1，a_2，…满足

$$a_{i-1}+a_{i+1}=2a_i \qquad (i=1,2,3,\cdots)$$

求证：对于任何自然数n，

$$p(x)=a_0C_n^0(1-x)^n+a_1C_n^1x(1-x)^{n-1}+a_2C_n^2x^2(1-x)^{n-2}+\cdots+a_{n-1}C_n^{n-1}x^{n-1}(1-x)+a_nC_n^nx^n$$

是一次多项式.

注：(1) 本题有明显的高等数学背景，为避免引起无谓的纠缠，可附加条件$a_1 - a_0 \neq 0$.

(2) 若$P(x)$为一次多项式，则有$p(x) = p(0) + [p(1) - p(0)]x = a_0 + (a_n - a_0)x = a_0 + n(a_1 - a_0)x$. 这样，证明就有了一个明确具体的方向. 特别是可以为数学归纳法的实施提供了方便.

(3) 把上述$p(x)$的表达式，看成数列$p_n(x)$的通项公式$p_n(x) = a_0 + n(a_1 - a_0)x$，则$p_n(x)$是一个首项为$a_0$，公差为$(a_1 - a_0)x$的等差数列.取$x = 1$，有$a_n = p_n(1) = a_0 + n(a_1 - a_0)$，即数列$\{a_n\}$为等差数列，命题的充分性成立.

下面给出本题的几种证法.

证明一：令$y = 1 - x$.由已知条件知$\{a_n\}$为等差数列. 把通项公式$a_k = a_0 + k(a_1 - a_0)$（注意，它与中学课本中$a_k = a_1 + (k-1)(a_1 - a_0)$的微小区别）代入得

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k C_n^k x^k y^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} [a_0 + k(a_1 - a_0)] C_n^k x^k y^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_0 C_n^k x^k y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} k(a_1 - a_0) C_n^k x^k y^{n-k}$$

$$= a_0 \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} n(a_1 - a_0) x C_{n-1}^{k-1} x^{k-1}$$

$$y^{(n-1)-(k-1)}$$

$$= a_0(x+y)^n + n(a_1-a_0)x\sum_{r=0}^{n-1} C_{n-1}^r x^r y^{(n-1)-r}$$

$$= a_0(x+y)^n + n(a_1-a_0)x(x+y)^{n-1}.$$

由这个一般性的结论可以得出很多结果。特别地，把$y=1-x$代入，便得

$$p(x) = a_0 + n(a_1-a_0)x$$

为一次多项式。

证明二：我们来证明$p_n(x)$是一个等差数列。

$$p_1(x) = a_0C_1^0(1-x) + a_1C_1^1 x = a_0 + (a_1-a_0)x.$$

$$p_n(x) = a_0C_n^0(1-x)^n \sum_{k=1}^{n-1} a_kC_n^k x^k(1-x)^{n-k} + a_nC_n^n x^n$$

$$= a_0C_{n-1}^0(1-x)^n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k(C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1})x^k$$

$$(1-x)^{n-k} + a_nC_{n-1}^{n-1}x^n$$

$$= (1-x)\sum_{k=0}^{n-1} a_kC_{n-1}^k x^k(1-x)^{n-1-k} + x\sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}C_{n-1}^k$$

$$x^k(1-x)^{n-1-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} a_kC_{n-1}^k x^k(1-x)^{n-1-k} + x\sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)C_{n-1}^k$$

$$x^k(1-x)^{n-1-k}$$

$$= p_{n-1}(x) + x(a_1-a_0)\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k x^k(1-x)^{n-1-k}$$

$$= p_{n-1}(x) + x(a_1-a_0)[x+(1-x)]^{n-1}$$

$$= p_{n-1}(x) + (a_1-a_0)x \qquad (n\geqslant 2)$$

这表明$p_n(x)$是公差为$(a_1-a_0)x$的等差数列，通项公式为

$$p_n(x)=p_1(x)+(n-1)(a_1-a_0)x$$
$$=a_0+n(a_1-a_0)x。$$

证明三：通过$p_n(0)$、$p_n(1)$可计算出$p_n(x)$若为一次多项式，必定是$p_n(x)=p_n(0)+(p_n(1)-p_n(0))x=a_0+n(a_1-a_0)x$。再由证明二可得递推关系$p_{n+1}(x)=p_n(x)+(a_1-a_0)x$。于是可用数学归纳法证。（略）

证明四：设$p(x)\equiv\sum_{k=0}^{n}b_kx^k$。由已知有

$$p(x)=\sum_{i=0}^{n}a_iC_n^ix^i(1-x)^{n-i}$$

$$=\sum_{i=0}^{n}a_iC_n^ix^i\sum_{r=0}^{n-i}C_{n-i}^{r}(-x)^r$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\sum_{r=0}^{n-i}(-1)^ra_iC_n^iC_{n-i}^{r}x^{i+r}$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=i}^{n}(-1)^{k-i}a_iC_n^iC_{n-i}^{k-i}x^k \qquad (k=i+r)$$

$$=\sum_{k=i}^{n}\sum_{k=i}^{n}(-1)^{k+i}a_iC_n^kC_k^ix^k((-1)^{k-i}=(-1)^{k+i})$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k+i}a_iC_n^kC_k^ix^k \qquad (约定C_0^0=1)$$

比较对应项的系数，有

$$b_0=(1)^0a_0C_n^0C_0^0=a_0$$

$$b_1 = -a_0 C_n^1 C_1^0 + a_1 C_n^1 C_1^1 = n(a_1 - a_0)$$

$$b_k = (-1)^k C_n^k \sum_{i=0}^{k} (-1)^i a_i C_k^i = 0 \qquad (2 \leqslant k \leqslant n)$$

其中$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i a_i C_k^i = 0$可仿照证明一来证。于是

$$p(x) = b_0 + b_1(x) = a_0 + n(a_1 - a_0)x.$$

证明五： 对$p(x) = \sum_{k=0} a_k C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$求导

$$p'(x) = -\sum_{k=0}^{n-1} (n-k) a_k C_n^k x^k (1-x)^{n-k-1}$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} C_n^{k+1} x^k (1-x)^{n-k-1}$$

$$= n \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) C_{n-1}^k x^k (1-x)^{(n-1)-k}$$

$$= n(a_1 - a_0) \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k x^k (1-x)^{(n-1)-k}$$

$$= n(a_1 - a_0) \qquad \text{（非零常数）}$$

可见，$p(x)$必为一次多项式。

证法六：解任何一个数学题目，都应当充分发掘和利用题目本身所蕴含的信息.既然题目要求证明$p(x)$是一个一次多项式，我们便可先设$p(x) = Ax + B$. （1）

以$x=0$代入（1）得$B = p(0) = a_0 c^0{}_n = a_0$;

以$x=1$代入（1）得$A + B = p(1) = a_n C_n^n = a_n$。

于是 $A = a_n - B = a_n - a_0$。

因此，我们需要证明

$p(x)=a_0+(a_n-a_0)x$。

由题设条件：a_0，a_1，a_2，…，为等差数列，则有$a_n=a_0+n(a_1-a_0)$，$(n=0, 1, 2, \cdots)$。这样，我们要证明的是

$$p(x)=a_0+n(a_1-a_0)x \tag{2}$$

下面，应用数学归纳法证之。

当$n=1$时有

$p(x)=a_0C^0_1(1-x)+a_1C^1_1x=a_0(1-x)+a_1x=a_0+(a_1-a_0)x$.

这证明当$n=1$时，公式(2)成立。

假设对n成立，即(2)式成立，要证对$n+1$也成立。这时

$$p(x)=\sum_{i=0}^{n+1}a_iC^i_{n+1}x^i(1-x)^{n+1-i}.$$

根据公式$C^i_{n+1}=C^{i-1}_n+C^i_n$，可作如下推导：

$$p(x)=\sum_{i=0}^{n+1}a_i\left[C^i_n+C^{i-1}_n\right]x^i(1-x)^{n+1-i}$$

$$=\sum_{i=0}^{n}a_iC^i_nx^i(1-x)^{n+1-i}+\sum_{i=0}^{n+1}a_iC^{i-1}_n\,x^i(1-x)^{n+1-i}$$

$$=(1-x)\sum_{i=0}^{n}a_iC^i_n(1-x)^{n-i}+x\sum_{i=0}^{n+1}a_iC^{i-1}_n\,x^{i-1}(1-x)^{n-(i-1)}.$$

在最后一个和式中，用i来代替$i-1$，得到

$$p(x)=(1-x)\sum_{i=0}a_iC^i_n(1-x)^{n-i}+x\sum_{i=0}a_{i+1}C^i_nx^i$$

$(1-x)^{n-i}$ (3)

因为$a_{i+1}=a_i+(a_1-a_0)$，所以

$$\sum_{i=0}^{n} a_{i+1}C_n^i x^i(1-x)^{n-i}=\sum_{i=0}^{n} a_iC_n^i x^i(1-x)^{n-i}+(a_1-a_0)$$

$$\sum_{i=0}^{n} C_n^i \cdot x^i(1-x)^{n-i}=\sum_{i=0}^{n} a_iC_n^i x^i(1-x)^{n-i}+(a_1-a_0)$$

代入(3)得到

$$p(x)=\sum_{i=0}^{n} a_iC_n^i x^i(1-x)^{n-i}+x(a_1-a_0).$$

由归纳假设可知

$$p(x)=a_0+n(a_1-a_0)x+(a_1-a_0)x$$
$$=a_0+(n+1)(a_1-a_0)x.$$

这样就完成了归纳法证明。

注：在竞赛中，有许多参赛者都企图用数学归纳法来证明本题，但对者极少。一些参赛者失败的原因在哪里？不少的人在得到(3)以后，他们虽然利用归纳假设，注意到了

$$\sum_{i=0}^{n} a_iC_n^i x^i(1-x)^{n-i}$$

及
$$\sum_{i=0}^{n} a_{i+1}C_n^{i+1} x^i(1-x)^{n-i}$$

都是一次多项式，用了$Ax+B$及$Cx+D$分别来代表它们，代入(3)之后，得到

$$p(x)=(1-x)(Ax+B)+x(cx+D).$$

但从这里已无法断言它是一个一次多项式。因而他们错就错在没有弄清两个一次多项式$Ax+B$与$cx+D$的具体关系。

例4 （75年第四届美国数学奥林匹克试题）

若$p(x)$表示n次多项式，当$k=0$，1，2，…，n时，有$p(k)=\frac{k}{k+1}$，试确定$p(n+1)$。

解：令$Q(x)=(x+1)p(x)-x$。

因对　$x=0$，1，2，…，n，$Q(x)=0$，

所以　$(x+1)p(x)-x=Ax(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$。

为确定A，令$x=-1$，于是

$1=A(-1)^{n+1}(n+1)!$

则　$$p(x)=\frac{\frac{(-1)^{n+1}x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}{(n+1)!}+x}{x+1}$$

由此可得

$$p(n+1)=\begin{cases}1 & (n\text{是奇数})\\ \frac{n}{n+2} & (n\text{是偶数})\end{cases}$$

例5 （86年全俄数学奥林匹克试题）

求一个整系数多项式，使得$\alpha=\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}$是它的根。

解：因为$\alpha^3=(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3})^3=5+3\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{3}(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3})=5+3\sqrt[3]{6}\alpha$，

所以　$(\alpha^3-5)^3=(3\sqrt[3]{6}\alpha)^3=162\alpha^3$。

即　$\alpha^9-15\alpha^6-87\alpha^3-125=0$。

则　$p(x)=x^9-15x^6-87x^3-125$

就是满足条件的一个多项式，$p(x)$乘以任意一个多项式

$Q(x)$，则$p(x)Q(x)$仍满足条件.

例 6 （第38届美国中学数学竞赛(AHSME)试题）

满足$f(x^2)=[f(x)]^2=f(f(x))$且次数大于或等于1的多项式f有多少个？

(A) 0，(B) 1，(C) 2，

(D) 有限多个但大于 2 个，

(E) 无限多个.

解：令$f(x)=y$，代入$f(f(x))=[f(x)]^2$，得$f(y)=y^2$. 已知$f(x)$是次数大于或等于1的多项式，所以对应于x的一切值，$f(x)=y$有无穷多个不同的值，它们都使$f(x)$和x^2相等（即$f(y)=y^2$）。因此，$f(x)\equiv x^2$，即满足上述条件的f只有1个。显然，题设另一个条件$f(x^2)=[f(x)]^2$也能满足。于是，应选答案(B)。

例 7 （第20届全苏中学生数学奥林匹克试题）

如果多项式$p(x)$的所有系数都是0，1，2或3时，称之为"容许的"。对于给定的自然数n，求满足$p(2)=n$的所有"容许的多项式"的个数.

解：设$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$是满足题设的多项式，那么它的系数$a_i\in\{0, 1, 2, 3\}$。$p(2)$启发我们化$a_i$为二进制数中的两位数

$a_i=b_i\cdot 2^0+c_i\cdot 2^1$,

其中b_i、$c_i\in\{0, 1\}$。而每个$p(x)$由b_i、c_i所唯一确定：$p(x)=\sum(b_i+2c_i)x^i$。

这里及下面的总和指标i遍历某个有限的非负整数的集合.

再考虑分别对每个$m=0, 1, 2, \cdots, \left[\frac{n}{2}\right]$的值给出的多

项式

$$p_m(x)=\sum(b_i+2c_i)x^i,$$

其中b_i，$c_i\in\{0,1\}$分别是$n-2m$,m表为二进数的数字，即由下面的展开式所确定：

$$n-2m=b_0\cdot 2^0+b_1\cdot 2^1+b_2\cdot 2^2+\cdots$$

$$m=c_0\cdot 2^0+c_1\cdot 2^1+c_2\cdot 2^2+\cdots \qquad (*)$$

可以检验：

$$p_m(2)=\sum(b_i+2c_i)\cdot 2^i=\sum b_i\cdot 2^i+2\sum c_i\cdot 2^i$$

$$=(n-2m)+2m=n.$$

这样一来，每个满足题设的多项式$p(x)$恰与

$$p_0(x),\ p_1(x),\ \cdots,\ p_{\left[\frac{n}{2}\right]}(x)$$

中的一个多项式恒等.

最后说明由（＊）给出的m为什么不超过$\left[\frac{n}{2}\right]$. 事实上，

$$n=P(2)=\sum(b_i+2c_i)\cdot 2^i>2\sum c_i\cdot 2^i=2m,$$

所以 $\quad m\leqslant\left[\frac{n}{2}\right]$

于是，对给定的自然数n，所有满足$P(2)=n$的“容许多项式”有$\left[\frac{n}{2}\right]$个.

例 8 （74年第三届美国数学奥林匹克试题）

令a，b，c表示三个不同的整数，且令P表示整系数多项式. 证明：不可能有$P(a)=b$，$P(b)=c$，$P(c)=a$.

证明： 因为P是整系数多项式，且a,b和c是不同的整数，如果我们令

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n,$$

那么

$$P(a)-P(b)=a_1(a-b)+a_2(a^2-b^2)+\cdots+a_n(a^n-b^n)$$
$$=(a-b)Q(a,\ b),$$

其中$Q(a,\ b)$是一个整数。于是

$$\frac{P(a)-P(b)}{a-b}=Q(a,\ b),$$

同理 $$\frac{P(b)-P(c)}{b-c}=Q(b,\ c),$$

$$\frac{P(c)-P(a)}{c-a}=Q(c,\ a).$$

其中$Q(b,\ c)$和$Q(c,\ a)$都是整数.

假设$P(a)=b$，$P(b)=c$，并且$P(c)=a$，那么

$$(b-c)=(a-b)Q(a,\ b),$$
$$(c-a)=(b-c)Q(b,\ c),$$
$$(a-b)=(c-a)Q(c,\ a).$$

这就有 $Q(a,\ b)\cdot Q(b,\ c)\cdot Q(c,\ a)=1$，所以$|Q(a,\ b)|=|Q(b,\ c)|=|Q(c,\ a)|=1$. 最后$|a-b|=|b-c|=|c-a|$。这个结论是不可能的，它与$a$，$b$和$c$是不同的整数相矛盾，于是本命题为真.

二、根据要求，确定多项式某项的系数

确定多项式某项的系数是大家熟悉的，这里，再举几例.

例 1 （第4届美国数学邀请赛(AIME)试题）

多项式$1-x+x^2-x^3+\cdots+x^{16}-x^{17}$可以写成下列形式：

$$a_0+a_1y+a_2y^2+a_3y^3+\cdots+a_{16}y^{16}+a_{17}y^{17},$$

其中$y=x+1$，$a_i(i=0, 1, 2, \cdots, 17)$都是常数．求$a_2$的值．

解法一：以$x=y-1$代入前一多项式，得

$1-(y-1)+(y-1)^2-(y-1)^3+\cdots+(y-1)^{16}-(y-1)^{17}$，

可获y^2的系数$a_2=1+C_3^1+C_4^2+C_5^3+\cdots+C_{16}^{14}+C_{17}^{15}$．

根据$C_n^{m-1}+C_n^m=C_{n+1}^m$，可连续推得

$$\begin{aligned}a_2&=C_3^0+C_3^1+C_4^2+C_5^3+\cdots+C_{16}^{14}+C_{17}^{15}\\&=C_4^1+C_4^2+C_5^3+\cdots+C_{16}^{14}+C_{17}^{15}\\&=C_5^2+C_5^3+\cdots+C_{16}^{14}+C_{17}^{15}\\&=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&=C_{17}^{14}+C_{17}^{15}=C_{18}^{15}=C_{18}^3=816.\end{aligned}$$

解法二：设$a_0+a_1(x+1)+a_2(x+1)^2+a_3(x+1)^3+\cdots+a_{17}(x+1)^{17}$

$$=1-x+x^2-x^3+\cdots+x^{16}-x^{17}.$$

对此式连续两次求导，可得

$$2a_2+3\cdot 2a_3(x+1)+\cdots+17\cdot 16a_{17}(x+1)^{15}$$
$$=2-3\cdot 2x+\cdots-17\cdot 16x^{15}.$$

令　$x=-1$，由此式可得

$2a_2=1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+16\cdot 17$，

则　$a_2=\frac{1}{2}[(1^2+2^2+\cdots+16^2)+(1+2+\cdots+16)]$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{6}16\cdot 17(2\cdot 16+1)+\frac{1}{2}\cdot 16(16+1)\right]$$

$=816$。

例 2 （63年北京竞赛题）

求$(1+x)^3+(1+x)^4+(1+x)^5+\cdots+(1+x)^{n+2}$展开式里$x^2$的系数。

解法一：因为$(1+x)^3+(1+x)^4+(1+x)^5+\cdots+(1+x)^{n+2}$

$$=\frac{(1+x)^3[(1+x)^n-1]}{(1+x)-1}$$

$$=\frac{1}{x}[(1+x)^{n+3}-(1+x)^3]$$

则此展开式中x^2的系数为：

$$C_{n+3}^3-1=\frac{1}{3!}(n+3)(n+2)(n+1)-1$$

$$=\frac{1}{6}(n^3+6n^2+11n)。$$

解法二：在$(1+x)^3+(1+x)^4+(1+x)^5+\cdots+(1+x)^{n+2}$的展开式里$x^2$项的系数为$C_3^2+C_4^2+C_5^2+\cdots+C_{n+2}^2$。

由组合性质$C_n^{m-1}=C_{n+1}^m-C_n^m$，于是上式可改写为

$$(C_4^3-C_3^3)+(C_5^3-C_4^3)+(C_6^3-C_5^3)+\cdots+(C_{n+3}^3-C_{n+2}^3)$$

$$=C_{n+3}^3-C_3^3=C_{n+3}^3-1。$$

则x^2项的系数为$C_{n+3}^3-1=\frac{1}{6}(n^3+6n^2+11n)$。

例 3 （79年贵州竞赛题）

已知多项式

$$P(x)=(2x-1)^{1979}(3x^3-2x^2+x-3)^3(x^2-3x+1)^{25}。$$

求这多项式的所有系数之和。

解：因所给多项式的最高次数是

$$1\times1979+3\times3+2\times25=2038.$$

于是，可假定它的展开式为

$$P(x)=a_0x^{2038}+a_1x^{2037}+a_2x^{2036}+\cdots+a_{2037}x+a_{2038}.$$

其中a_0，a_1，a_2，…，a_{2038}为其各项的系数。

但因$a_0x^{2038}+a_1x^{2037}+a_2x^{2036}+\cdots+a_{2037}x+a_{2038}$

$$=(2x-1)^{1979}(3x^3-2x^2+x-3)^3(x^2-3x+1)^{25}$$

是恒等式，故对于x的任意值，等式两边代数式的值应相等，令$x=1$代入便得

$$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{2037}+a_{2038}=(2-1)^{1979}(3-2+1-3)^3(1-3+1)^{25}$$

$$=1^{1979}\cdot(-1)^3(-1)^{25}=1.$$

所以，多项式$P(x)$的所有系数之和为1.

三、借助多项式的性质，求解有关试题

在中学数学教材里，已经讲述过如下定理：

定理1　如果两个一元多项式各自合并同类项后对应项系数分别相等，那么这两个多项式恒等；反过来，如果两个一元多项式恒等，那么它们各自合并同类项后对应项系数分别相等。

定理2　（余数定理）多项式$f(x)$除以$x-b$所得的余数等于$f(b)$。

定理3　（因式定理）多项式$f(x)$有一个因式$x-b$的充要条件是$f(b)=0$。

定理4　如果整系数多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots$

$+a_1x+a_0$有因式$px-q$(p、q是互质的整数)，那么 p一定是首项系数a_n的约数，q一定是末项系数a_0的约数。

定理5　$x=b$是方程 $f(x)=0$的一个根的充要条件是多项式$f(x)$有因式$x-b$。

根据上面的定理，能求解有关试题。

例1　(63年北京市竞赛题)

设$p(x)=a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+\cdots+a_1x+a_0$式中各系数$a_i$($i=0$，1，2，…，$k$)都是整数。今设有四个不同的整数$x_1$，$x_2$，$x_3$，$x_4$使$p(x_j)$($j=1$，2，3，4)都等于2，试证明：对于任何整数$x$，$p(x)$决不等于1，3，5，7，9的任何一个。

证法一：根据余式定理，有

$$p(x)-2=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)Q(x) \qquad (1)$$

其中$Q(x)$是一个整系数多项式，或者是一个整数。因此，无论x为何整数，$(x-x_1)$，$(x-x_2)$，$(x-x_3)$，$(x-x_4)$，$Q(x)$总是整数，且前四者各不相等，则(1)式右边至少有四个不同的因数。

如果$p(x)$等于1，3，5，7，9中的任一个，则(1)式左边可能是-1，1，3，5，7，这是不可能的。

证法二：因为1，3，5，7，9都是奇数，所以它们减去2后还是奇数，且奇数的因数必是奇数。如果(1)式成立，势必$x-x_1$，$x-x_2$，$x-x_3$，$x-x_4$，$Q(x)$都是奇数。如果是这样的话，四个不同奇数之积的绝对值必不小于9，于是$p(x)$之值不能在$-9+2$与$9+2$之间，而1，3，5，7，9正好都在$-9+2$与$9+2$之间，矛盾。

例2　(65年美国数学竞赛题)

求以x^3-x除$x+x^9+x^{25}+x^{49}+x^{81}$的余式。

解法一： $\dfrac{x+x^{9}+x^{25}+x^{49}+x^{81}}{x^{3}-x}$

$$=\frac{1+x^{8}+x^{24}+x^{48}+x^{80}}{x^{2}-x}$$

因为$f(x^2)=(x^2)^{40}+(x^2)^{24}+(x^2)^{12}+(x^2)^4+1$

$$f(1)=1+1+1+1+1=5.$$

所以根据余数定理便知所求余数是5。

解法二： $\dfrac{x+x^{9}+x^{25}+x^{49}+x^{81}}{x^{3}-x}$

$$=\frac{1+x^{8}+x^{24}+x^{48}+x^{80}}{x^{2}-1}$$

$$=\frac{5+(x^{8}-1)+(x^{24}-1)+(x^{48}-1)+(x^{80}-1)}{x^{2}-1}$$

$$=\frac{5}{x^{2}-1}+(x^{4}+x^{2}+1)+(x^{12}+x^{10}+\cdots+1)$$

$$+(x^{24}+x^{22}+\cdots+1)+(x^{40}+x^{38}+\cdots+1)$$

则所求余数为5。

例 3 （78年重庆市竞赛题）

设多项式$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2{}^{n-2}+\cdots+a_n \quad (a_0\neq 0)$的系数均为有理数。求证这个多项式能被$x-1$所整除的必要与充分条件是$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n=0$。

证法一： 条件是必要的。

事实上，若$f(x)$能被$x-1$整除，则$f(x)$有一个因式$x-1$，根据因式定理有$f(1)=0$。即

$$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n=0.$$

条件是充分的。事实上，

若$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n=0$，则$f(1)=0$。

因而$f(x)$有一个因式$x-1$，于是$f(x)$被$x-1$整除。

证法二：设$f(x)$能被$x-1$整除，设其商为$Q(x)$。($Q(x)$为$n-1$次多项式)，则必有$f(x)=Q(x)(x-1)$。在此式中令$x=1$，得$f(1)=Q(1)(1-1)=0$，则

$$f(1)=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n=0.$$

反之，若$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n=0$，且$f(x)$不能被$x-1$整除，于是应有$f(x)=Q(x)(x-1)+R$，这里R是一个非零常数。以$x=1$代入，应有 $f(1)=R\neq0$，即 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n\neq0$，与所设矛盾。因而$f(x)$能被$x-1$整除。

例 4 (64年成都市竞赛题)

试证：多项式 $A\equiv x^{99}+x^{88}+x^{77}+x^{66}+x^{55}+x^{44}+x^{33}+x^{22}+x^{11}+1$能被多项式 $B\equiv x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$整除。

证法一：因为 $A-B=x^9(x^{90}-1)+x^8(x^{80}-1)+x^7(x^{70}-1)+x^6(x^{60}-1)+x^5(x^{50}-1)+x^4(x^{40}-1)+x^3(x^{30}-1)+x^2(x^{20}-1)+x(x^{10}-1)$，而且每个括号内的式子都能被$x^{10}-1$整除，可知$A-B$能被$x^{10}-1$整除。

又因$x^{10}-1=(x-1)B$。所以$A-B$能被B整除。

因此，A能被B整除。

证法二：因为

$$(x^{90}+x^{80}+x^{70}+x^{60}+x^{50}+x^{40}+x^{30}+x^{20}+x^{10}+1)$$
$$(x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)=$$

$\sum\limits_{k=0}^{99} x_k$，即 $\sum\limits_{k=0}^{99} x^k=(x^{90}+x^{80}+\cdots+x^{10}+1)B$，

而且 $\sum\limits_{k=0}^{99} x_k-A=(x^{98}+x^{97}+\cdots+x^{89})+(x^{87}+x^{86}+\cdots x^{78})+\cdots+(x^{10}+x^9+\cdots+x)=x^{89}B+x^{78}B+\cdots+xB=(x^{89}+x^{78}+\cdots+x)B$。

所以，
$$\begin{aligned}A&=(x^{90}+x^{80}+x^{70}+\cdots+x^{10}+1)B\\&\quad-(x^{89}+x^{78}+\cdots+x)B\\&=(x^{90}-x^{89}+x^{80}-x^{78}+x^{70}-\cdots+x^{10}-x+1)B.\end{aligned}$$

可见，A能被B整除。

注：证法二不仅证明了本题，而且还得到了以B整除A所得的商。

证法三：要证明A能被B整除，只须证明方程$B=0$的所有根统统也是方程$A=0$的根。

由于 $B=\dfrac{x^{10}-1}{x-1}$，可见$B=0$的诸根就是$x^{10}=1$的诸根中不等于1者，也就是如下的九个数：

$$a_k=\cos\frac{2k\pi}{10}+i\sin\frac{2k\pi}{10}\ (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 9).$$

又有 $A=\dfrac{(x^{11})^{10}-1}{x^{11}-1}=\dfrac{(x^{10})^{11}-1}{x^{11}-1}$，可见$A=0$的根就是使$(x^{10})^{11}=1$而使$x^{11}\neq1$的数。

因为 $a_k{}^{10}=1$，所以$(a_k{}^{10})^{11}=1$。

又由 $a_k{}^{11}=\cos\dfrac{11}{10}(2\pi)+i\sin\dfrac{11}{10}(2\pi)$

$(K=1,2,\cdots 9)$，可知 $\frac{11K}{10}$ 不是整数，因此 $a_K{}^{11}\neq 1$。从而 a_K 是方程 $A=0$ 的根。

综上可知 A 能被 B 整除。

例5 （78年淮北市竞赛题）

$x^{n+2}+(x+1)^{2n+1}$ 能被 x^2+x+1 整除　　（n 是自然数）

证明：因为　$x^2+x+1=(x-w)(x-w^2)$

$$w=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}，w^2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}，$$

这里　$w+w^2=-1$，$w^3=1$。

对于 $f(x)=x^{n+2}+(x+1)^{2n+1}$，有

$$\begin{aligned}f(w)&=w^{n+2}+(w+1)^{2n+1}=w^{n+2}+(-w^2)^{2n+1}\\&=w^{n+2}-w^{4n+2}=w^{n+2}(1-w^{3n})\\&=w^{n+2}(1-1^n)=0;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(w^2)&=(w^2)^{n+2}+(w^2+1)^{2n+1}=w^{2n+4}+(-w)^{2n+1}\\&=w^{2n+1}(w^3-1)=w^{2n+1}(1-1)=0.\end{aligned}$$

因此，$f(x)$ 有因式 $(x-w)(x-w^2)$，即 $f(x)$ 有因式 x^2+x+1，亦即 $f(x)$ 能被 x^2+x+1 整除。

例 6 （57年上海市竞赛题）

$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$，以 $(x-\alpha)(x-\beta)$ 除之，设 $\alpha\neq\beta$，求它的剩余。

解：设 $f(x)=g(x)(x-\alpha)(x-\beta)+R(x)$。

因为 $g(x)$ 为次数是 $n-2$ 的整函数，$(x-\alpha)(x-\beta)$ 为二次式，所以 $R(x)$ 至多为一次式，可设为 $Ax+B$。

并求 A、B：

$$\begin{cases}f(\alpha)=\alpha A+B & （令x=\alpha）\\ f(\beta)=\beta A+B & （令x=\beta）\end{cases}$$

解得 $A=\dfrac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}$， $B=\dfrac{\beta f(\alpha)-\alpha f(\beta)}{\beta-\alpha}$ $(\alpha\neq\beta)$

则得 $R(x)=\dfrac{[f(\beta)-f(\alpha)]x+[\beta f(\alpha)-\alpha f(\beta)]}{\beta-\alpha}$

例 7 （63年上海市竞赛题）

设多项式$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$。这里$a_0$，$a_1$，…，$a_{n-1}$，$a_n$都是整数，已知$f(2)$，$f(3)$都是6的倍数，那么$f(5)$也是6的倍数。

证明：因为$f(2)=2^na_0+2^{n-1}a_1+\cdots+2a_{n-1}+a_n$能被6整除，当然能被 2 整除；

又因 $2^na_0+2^{n-1}a_1+\cdots+2a_{n-1}$能被 2 整除，

所以 a_n能被 2 整除。

由于$f(3)=3^na_0+3^{n-1}a_1+\cdots+3a_{n-1}+a_n$能被 6 整除，当然能被 3 整除。

又由于$3^na_0+3^{n-1}a_1+\cdots+3a_{n-1}$能被 3 整除，

于是a_n能被 3 整除。

综上可知，a_n能被 6 整除。

再因
$$
\begin{aligned}
f(5)&=a_0(3+2)^n+a_1(3+2)^{n-1}+\cdots+a_{n-1}(3+2)+a_n\\
&=a_0(3^n+C_n^13^{n-1}\cdot 2+\cdots+C_n^{n-1}3\cdot 2^{n-1}+2^n)\\
&\quad+a_1(3^{n-1}+C_{n-1}^13^{n-2}\cdot 2+\cdots+C_{n-1}^{n-2}3\cdot 2^{n-2}+\\
&\quad+2^{n-1})\\
&\quad+\cdots\cdots\\
&\quad+a_{n-1}(3+2)+a_n
\end{aligned}
$$

而且每个括号中除首和尾外，其它各项都有2和3的因子，即都能被 6 整除，写成$F(3,2)$。则 $f(5)=F(3,2)+a_03^n+$

$a_1 3^{n-1}+\cdots+a_{n-1}3+a_n+a_0 2^n+a_1 2^{n-1}\cdots+a_{n-1}2+a_n-a_n=$ $F(3,2)+f(3)+f(2)-a_n$.

由$F(3,2)$、$f(3)$、$f(2)$，a_n都能被 6 整除，得知$f(5)$也能被 6 整除。

例 8 （78年广东竞赛题）

恒等式 $6x^2-\square xy-3y^2-x-7y-2=(2x+\square y+\square)(\square x+\square y-2)$的各方格中究竟应是什么数字？

解：设$6x^2-axy-3y^2-x-7y-2=(2x+by+c)(dx+ey-2)$，将右端展开，因左、右两边对应项系数相等，则有$2d=6$，$2e+bd=-a$，$be=-3$，$cd-4=-1$，$ce-2b=-7$，$-2c=-2$，解得 $(a,b,c,d,e)=(-7,3,1,3,-1)$；

$$(a,b,c,d,e)=\left(-\frac{11}{2},\ \frac{1}{2},\ 1,\ 3,\ -6\right).$$

则恒等式为

$6x^2+7xy-3y^2-x-7y-2=(2x+3y+1)(3x-y-2)$，

或 $6x^2-\frac{11}{2}xy-3y^2-x-7y-2=\left(2x+\frac{1}{2}y+1\right)(3x-6y-2)$。

例 9 （63年北京竞赛题）

已知多项式x^3+bx^2+cx+d的系数都是整数，并且$bd+cd$是奇数。证明：这个多项式不能分解为两个整系数多项式的乘积。

证法一。因为$bd+cd$是奇数，故$b+c$与d都是奇数，于是b,c两数有两种情况：b偶c奇或b奇c偶。

(1) b是偶数，c,d是奇数。

如果$f(x)=x^3+bx^2+cx+d$能分解成两个整系数多项式

的乘积，便一定有一个一次因式。既然首项系数是1，不妨设

$$(x+p)\cdot(x^2+qx+r)=x^3+bx^2+cx+d \quad ①$$

其中要求p、q、r都是整数，比较两边的对应项系数，得

$$pr=d=\text{奇数} \quad ②$$

$$pq+r=c=\text{奇数} \quad ③$$

$$p+q=b=\text{偶数} \quad ④$$

从②断定p、r都是奇数，由此再从③看，势必q是偶数，此与④矛盾。

（2）c是偶数，b、d是奇数，可以同样地推出矛盾来。

综上可知，$f(x)$不能分解成整系数多项式之积。

证法二．已知b、c二数一奇一偶，d是奇数。如果希望$x+p$能除尽$f(x)$，必须p是奇数。用$x+p$除$f(x)$，根据余数定理知余数是

$$-p^3+bp^2-cp+d \quad ⑤$$

不论b偶c奇或b奇c偶，这余式的四项之中总是三项为奇数，一项为偶数，所以它必不为零，可见$f(x)$没有整系数因式。

证法三：已知$b+c$与d都是奇数，①中的p也是奇数。用$x=1$代入①，则右边为

$$1+b+c+d=\text{奇数}$$

而左边由于$x+p$变为$1+p$成为偶数，两边奇偶不同，必有①不成立。

注：证法三的优点在于不考虑b与c的奇偶性，因而不必分不同情形进行讨论。

例10 （79年河北省竞赛题）

（1） $f(x)$是一元四次整系数多项式，即

$f(x)=c_4x^4+c_3x^3+c_2x^2+c_1x+c_0$

其中c_0、c_1、c_2、c_3、c_4均为整数。

求证：a、b为整数且$a>b$，则$a-b$能整除$f(a)-f(b)$。

（2）甲乙二人在教室做作业，甲问乙："你做完了几道题？"乙回答说："我做完的题目数是一个正整数，而且是一个一元四次整系数多项式的根。你猜一猜？"于是，甲试着用7代入多项式，得值77，这时乙说："我做完的题目数比7多"，甲说："好，我再用大一点的正整数试一试"于是甲又用B代入多项式，其值是85。乙看了又说："我做的题目数比B还多"，后来，甲经过思考和计算，终于求出了乙做完的题目数，试根据上述对话，求乙完成的题目数。

（1）证明：因为$f(a)-f(b)=(c_4a^4+c_3a^3+c_2a^2+c_1a+c_0)-(c_4b^4+c_3b^3+c_2b^2+c_1b+c_0)=c_4(a^4-b^4)+c^3(a^3-b^3)+c_2(a^2-b^2)+c_1(a-b)=c_4(a-b)(a+b)(a^2+b^2)+c_3(a-b)(a^2+ab+b^2)+c_2(a-b)(a+b)+c_1(a-b)$。

由于上式各项都有因式$a-b$，所以$a-b$能整除$f(a)-f(b)$。

（2）解：设乙所说的一元四次整系数多项式为$f(x)$，乙所做题数为A，依题意有

$f(7)=77$，$f(B)=85$，$f(A)=0$ 且$7<B<A$。

根据$a-b$能整除$f(a)-f(b)$有

$A-7$能整除$f(A)-f(7)=-77$ ①

$A-B$能整除$f(A)-f(B)=-85$ ②

$B-7$能整除$f(B)-f(7)=8$ ③

由①$A-7$能整除77，可得

$A-7=1,7,11,77$　　（因$A>7$）

即　$A=8,14,18,84$；

由③$B-7$能整除8，可得

$B-7=1,2,4,8$　　（因$B>7$）

即　$B=8,9,11,15$。

由A和B的不同取值知：

$$\begin{cases}A=14\\B=8\end{cases}\quad\begin{cases}A=14\\B=11\end{cases}\quad\begin{cases}A=18\\B=8\end{cases}\quad\begin{cases}A=18\\B=9\end{cases}\quad\begin{cases}A=18\\B=11\end{cases}$$

$$\begin{cases}A=18\\B=15\end{cases}\quad\begin{cases}A=84\\B=8\end{cases}\quad\begin{cases}A=84\\B=9\end{cases}\quad\begin{cases}A=84\\B=11\end{cases}\quad\begin{cases}A=84\\B=15\end{cases}$$

均不满足②，而只有

$$\begin{cases}A=14\\B=9\end{cases}$$

才满足条件②，因此乙做的题目数为14。

第　三　讲

数学竞赛中的函数概念问题

变量间的函数关系，正是事物之间普遍联系与相互制约在量的方面的反映，具备这方面的知识，有助于认识自然现象，解决生产实践和科学技术中的数学问题。因此，在中学数学教材中把有关函数的内容放在极其重要的地位，函数概念便是一个重要而又基本的概念。

函数的定义域、值域、对应关系是组成函数概念的三要素。近年来，在国内外的数学竞赛中，有关函数概念的试题，即是求函数定义域、值域、对应关系的试题经常出现。

一、关于函数的定义域

如果函数的对应关系是用公式法表示的，那么求函数定义域可以参考下述准则：

（一）当函数为整式时，它的定义域是全体实数；

（二）当函数为偶次根式时，它的定义域由能使根号内的式子大于或等于0的数组成；

（三）当函数为分式时，它的定义域由能使分母不等于0的数组成；

（四）当函数为对数时，它的定义域由能使真数表达式大于0的数组成；

（五）若函数的解析式是由几个数学式子组合而成的，则这个函数的定义域就必须取这几个数学式子允许值范围的公共部分。

如果函数的对应关系是由图象法表示的，那么可用观察法求出定义域。

例1 求函数$f(x)=\log_a[\log_a(\log_a x)]$的定义域。

解：因为对数式的真数必须大于0，所以

当$a>1$时必须有$\log_a(\log_a x)>0$，

即 $\log_a x>1$，则$x>a$。

当$0<a<1$时也必须有$\log_a(\log_a x)>0$，

即$0<\log_a x<1$，则$a<x<1$。

这就是说，$f(x)$的定义域是：

$$\begin{cases} x>a & (a>1) \\ a<x<1 & (0<a<1)。\end{cases}$$

例2 求函数 $f(x)=\arcsin(\arcsin x)+\arccos\left(\dfrac{2\arccos x}{\pi-2}\right)$的定义域。

解：所求函数$f(x)$的定义域是下列不等式组的解集：

$$\begin{cases} -1\leqslant x\leqslant 1 & (1) \\ -1\leqslant \arcsin x\leqslant 1 & (2) \\ -1\leqslant \dfrac{2\arccos x}{\pi-2}\leqslant 1 & (3) \end{cases}$$

由于反正弦函数的值域为区间$\left[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$，那么满足不等式（2）的所有的角都属于正弦函数的单调递增区间。因此，不等式(2)等价于不等式

$\sin(-1) \leqslant \sin(\arcsin x) \leqslant \sin 1 \Longleftrightarrow -\sin 1 \leqslant x \leqslant \sin 1$.

由(3)有 $-\frac{\pi-2}{2} \leqslant \arccos x \leqslant \frac{\pi-2}{2}$

即是，(4) $-\frac{\pi-2}{2} \leqslant \arccos x$，(5) $\arccos x \leqslant \frac{\pi-2}{2}$.

又因，反余弦函数的值集是区间$[0, \pi]$，所以在所有的值$x \in [-1, 1]$上不等式(4)成立。

因为位于不等式公共部分中的值属于函数$\cos x$的单调递减区间，所以不等式(5)等价于不等式

$$\cos(\arccos x) \geqslant \cos\left(\frac{\pi}{2}-1\right) = \sin 1.$$

这样一来，为了找出该函数的定义域，必须求得满足不等式组

$$\begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ -\sin 1 \leqslant x \leqslant \sin 1 \\ \sin 1 \leqslant x \end{cases}$$

的x的集合，这个不等式组有唯一的解$x=\sin 1$。所以，给定函数$f(x)$的定义域由一个点$x=\sin 1$组成。

例3　已知函数$y=f(x)$的定义域是$[0, 1]$，求

(1) $f(x^2)$，　(2) $f(x+a)+f(x-a)$　$(a>0)$

的定义域。

解：(1) 欲使$f(x^2)$有意义，必须使$0 \leqslant x^2 \leqslant 1$.

即　$|x| \leqslant 1$　或　$-1 \leqslant x \leqslant 1$.

(2) 欲使 $f(x+a)+f(x-a)(a>0)$ 有意义，必须使$0 \leqslant x+a \leqslant 1$与$0 \leqslant x-a \leqslant 1$同时成立。即 $-a \leqslant x \leqslant 1-a$ 与 $a \leqslant x \leqslant 1+a$同时成立。

若$0<a\leqslant\frac{1}{2}$时，$f(x+a)+f(x-a)$ $(a>0)$的定义域为$[a, 1-a]$；

若$a>\frac{1}{2}$时，$f(x+a)+f(x-a)$ $(a>0)$的定义域不存在。

二、关于函数的值域

在中学数学课本里，有求函数值域的习题，但没有举例阐述求函数值域的方法．这里，作一补充简介。

（一）观察法

通过对函数定义域及其对应关系的观察，分析，找出所求函数的值域。

例1 求$f(x)=\sqrt{x^2+3}$的值域

解：由算术根的定义知，$f(x)$的值不是负数，而且$x^2\geqslant 0$，$x^2+3\geqslant 3$，$\sqrt{x^2+3}\geqslant\sqrt{3}$。

因此，所求函数值域是$[\sqrt{3}, +\infty)$。

例2 求$f(x)=\sqrt{4x-3}+\sqrt{4x^2+4x-3}+3$的值域。

解：显然，函数的定义域是$x\geqslant\frac{3}{4}$。

于是，$\sqrt{4x^2+4x-3}=\sqrt{(2x+1)^2-4}$

$$\geqslant\sqrt{\left(2\times\frac{3}{4}+1\right)^2-4}=\frac{3}{2}$$

且 $\sqrt{4x-3}\geqslant 0$。

因此，所求函数的值域是$\left(4\frac{1}{2}, +\infty\right)$。

（二）反函数法

由函数关系式$y=f(x)$，解出$x=f^{-1}(y)$，再求出函数$x=f^{-1}(y)$的定义域以确定$y=f(x)$的值域。

例3 求 $y=f(x)=\dfrac{2^x}{2^x+1}$的值域。

解： 不难求得 $x=f^{-1}(y)=\log_2\dfrac{y}{1-y}$，其定义域为

$$\begin{cases}\dfrac{y}{1-y}>0 & (1)\\ 1-y\neq 0 & (2)\end{cases}$$

所确定。

由(1)、(2)解得 $0<y<1$。

因此，所求函数的值域是$(0,1)$。

例4 求 $y=f(x)=\dfrac{5x+3}{2x-3}$的值域。

解： 由所给关系式，易得

$$x=f^{-1}(y)=\frac{3y+3}{2y-5},$$

其定义域显然是$\left(-\infty,\dfrac{5}{2}\right)\cup\left(\dfrac{5}{2},+\infty\right)$，因而，所求函数的值域便是$\left(-\infty,\dfrac{5}{2}\right)\cup\left(\dfrac{5}{2},+\infty\right)$。

（三）判别式法

某些函数的值域可以借助一元二次方程的判别式来解决。

例5 求 $y=f(x)=\dfrac{x^2+3}{2x^4+9}$的值域。

解：将已知函数关系式变形，有

$$2yx^4-x^2+9y-3=0 \qquad (x\text{的双二次方程}) \qquad (1)$$

因为原函数的定义域为实数集R，所以方程(1)必有实根。因而

$$\triangle=(-1)^2-4\times 2y(9y-3)\geqslant 0。$$

即 $72y^2-24y-1\leqslant 0$ (2)

解(2)可得 $\dfrac{2-\sqrt{6}}{12}\leqslant y\leqslant \dfrac{2+\sqrt{6}}{12}$ (3)

又有 $y=\dfrac{x^2+3}{2x^4+9}>0$ (4)

由(3)、(4)得 $0<y\leqslant \dfrac{2+\sqrt{6}}{12}$

因此，所求函数的值域是$\left(0,\ \dfrac{2+\sqrt{6}}{12}\right)$。

(四) 配方法

配方法在求函数值域时，也是很有效的常用方法。

例6 求 $y=f(x)=2(\log_2 2x)^2+\log_2(2x)^2+2\log_2 x+2$的值域。

(1980年日本高考题，提法略有变更)

解：将所给函数关系式化简得

$y=2(\log_2 x)^2+8\log_2 x+6$。

配方得 $y=2(\log_2 x+2)^2-2$。

因为当$x=\frac{1}{4}$时，$(\log_2 x+2)^2$有最小值0，所以，$(\log_2 x+2)^2$的值域为$[0, +\infty)$.

因此，所求函数的值域为$[-2, +\infty)$.

例7　当$x\in(\pi,\frac{3}{2}\pi)$时，求$f(x)=-\mathrm{tg}^2x-6\mathrm{tg}x+7$的值域.

解：因为$f(x)=-(\mathrm{tg}x+3)^2+16$.

又因　$x\in(\pi,\frac{3}{2}\pi)$，所以$\mathrm{tg}x>0$,

于是　$-(\mathrm{tg}x+3)^2<-3^2=-9$,

即　$f(x)=-(\mathrm{tg}x+3)^2+16<-9+16=7$.

因此，所求函数的值域是$(-\infty, 7)$.

（五）变量代换法

变量代换是解题中的常用方法，求函数值域时也常用到它.

例8　求$y=f(x)=x-\sqrt{1-2x}$的值域.

解：显然，函数的定义域为$(-\infty,\frac{1}{2}]$.

令　$u=\sqrt{1-2x}$，则$u\geqslant 0$且$x=\frac{1-u^2}{2}$.

于是$y=\frac{1-u^2}{2}-u$，即$y=-\frac{1}{2}(u+1)^2+1$.

由$u\geqslant 0$，有$-\frac{1}{2}(u+1)^2\leqslant-\frac{1}{2}$，则$y\leqslant-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$.

因此，所求函数的值域是$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$。

例9 求$y=f(x)=\dfrac{x-\sqrt{3}}{\sqrt{1+x^2}}$的值域。

解：函数的定义域显然是实数集R。

令 $x=\operatorname{tg}t, t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,则有

$$y=\frac{\operatorname{tg}t-\sqrt{3}}{\sec t}=\sin t-\sqrt{3}\cos t=2\sin\left(t-\frac{\pi}{3}\right)$$

由$-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$,有$-\frac{5}{6}\pi<t-\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{6}$。

当$-\frac{5}{6}\pi<t-\frac{\pi}{3}<-\frac{\pi}{2}$时，$y=f(x)$是减函数， 此时有

$-2<y<-1$。

当$-\frac{\pi}{2}\leqslant t-\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{6}$时，$y=f(x)$是增函数，此时有

$-2\leqslant y<1$。

综上可知，所求函数的值域是$[-2,1)$。

（六）应用代数基本不等式

某些函数的值域，应用代数基本不等式：$x+y\geqslant 2\sqrt{xy}$ $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0)$来寻求，较为简便。

例10 求 $y=f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$的值域。

解：因为$e^x>0$，$e^{-x}>0$，所以

$$y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\geqslant\sqrt{e^x\cdot e^{-x}}=1.$$

因此，所求函数的值域是$[1, +\infty)$。

例11 设a、b是不等于 1 的正数，

求 $y=\log_a b+\log_b a$的值域。

解：设$\log_a b=x$，则有

$$y=\log_a b+\log_b a=x+\frac{1}{x}.$$

当$x>0$时，$x+\frac{1}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2$，即$y\geqslant 2$；

当$x<0$时，$x+\frac{1}{x}=-\left[(-x)+\frac{1}{(-x)}\right]\leqslant -2\sqrt{(-x)\cdot\frac{1}{-x}}$

$=-2$，

即 $y\leqslant -2$。

综上可知，所求值域为$(-\infty, -2]\cup[2, +\infty)$。

（七）运用已知函数的有界性

例12 求下列函数的值域：

（1） $y=\frac{1}{x^2-1}$；

（2） $y=\frac{2\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+3}$。

解 （1）由于$x^2-1\neq 0$，则有$x^2-1=\frac{1}{y}$，于是 $x^2=1+$

$\frac{1}{y}=\frac{y+1}{y}$。再由 $x^2\geqslant 0$，有$\frac{y+1}{y}\geqslant 0$，解得 $y\leqslant -1$，$y>0$。因而其值域为$(-\infty, -1]\cup(0, +\infty)$。

(2) $\sqrt{x}+3\neq 0$，则由 $y=\frac{2\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+3}$有$\sqrt{x}$

$=-\frac{3y+4}{y-2}$。又因$\sqrt{x}\geqslant 0$，所以$-\frac{3y+4}{y-2}\geqslant 0$，解

得$-\frac{4}{3}\leqslant y<2$。于是，所求值域是 $\left[-\frac{4}{3}, 2\right)$。

（八）利用函数的单调性

例13　求下列函数的值域

(1) $f(x)=2x+3$，$x\in[-1, 2)$；

(2) $g(x)=\frac{1}{2x-3}$，$x\in(2, 4)$。

解：(1) 由于函数 $f(x)=2x+3$在实数集R上是单调增加的，故在$[-1, 2)$上$f(x)$也是单调增加的，所以$f(-1)<f(2)$。

又因$f(-1)=1$，$f(2)=7$，则知所求函数的值域为$[1, 7)$。

(2) 由于函数$g(x)=\frac{1}{2x-3}$在 $x>\frac{3}{2}$时是单调减少的，

故$g(2)>g(4)$。　又$g(2)=1$，$g(4)=\frac{1}{5}$。所以，要求的函数值域是$\left(\frac{1}{5}, 1\right)$。

（九）运用函数值域的定义

例14 求 $y=f(x)=\begin{cases}1 & (x>0)\\ 0 & (x=0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$ 的值域。

解：根据定义，易知所求值域是$\{1,0,-1\}$。

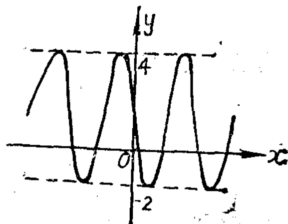
注：类似上述分段函数，一般采用列举法可以直接写出它的值域。

（十）图象法

若函数的对应关系可由图象表出，那么由图象的位置可以确定函数的值域。

例15 求 $y=f(x)=3\sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)+1$的值域。

解：把 $\sin x$的图象周期缩小3倍$\left(\text{即周期为}\frac{2}{3}\pi\right)$，再向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位；然后把振幅扩大3倍，再向上平移1个单位，即得 $y=3\sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)+1$的图象(图3-1)。



（图3-1）

由图象，不难看出所求函数的值域是$[-2,4]$。

三、函数的对应关系

自变量x与函数y的对应关系是指：对于自变量x的一个确定的数值x_0（定义域内），应以如何的方式求出函数y的对应值y_0。对应关系一般用f，g等字母来表示。

（一）求函数解析表达式

例1 已知$f\left(\frac{x+1}{x}\right)=\frac{x^2+1}{x^2}+\frac{1}{x}$，求$f(x)$。

解法一、变形：

$$f\left(\frac{x+1}{x}\right)=\left(\frac{x+1}{x}\right)^2-\frac{2x}{x^2}+\frac{x}{x^2}=\left(\frac{x+1}{x}\right)^2-\frac{1}{x}=\left(\frac{x+1}{x}\right)^2$$

$$-\frac{x+1}{x}+1,$$

即有　$f(\square)=(\square)^2-\square+1$

于是　$f(x)=x^2-x+1$。

解法二、换元：

设　$\frac{x+1}{x}=t$，则$x+1=tx$，$x=\frac{1}{t-1}$。

$$于是\quad f(t)=\frac{\left(\frac{1}{t-1}\right)^2+1}{\left(\frac{1}{t-1}\right)^2}+\frac{1}{\frac{1}{t-1}}=\frac{1+t^2-2t+1}{1}+t-1$$

$$=t^2-t+1$$

即$f(x)=x^2-x+1$。

例2 已知$f(x)$是一次函数，且$\underbrace{f\{f[\cdots f(x)]\}}_{10个}=1024x+1023$，试求$f(x)$的解析式。

解： 设$f(x)=ax+b\quad(a\neq0)$，则

$f_{(2)}(x)=f[f(x)]=f(ax+b)=a(ax+b)+b=a^2x+(a+1)b$,

$f_{(3)}(x)=f\{f[f(x)]\}=f[a^2x+(a+1)b]=a^3x+(a^2+a+1)b$。

由此可得：

$f_{(10)}(x)=a^{10}x+(a^9+a^8+a^7+\cdots+a+1)b$。

又由 $f_{(10)}(x)=1024x+1023$，则得

$$\begin{cases}a^{10}=1024=(\pm2)^{10}\\ \dfrac{a^{10}-1}{a-1}b=1023\end{cases}$$

解得 $a=2$，$b=1$或$a=-2$，$b=-3$。

于是，所求一次函数为

$$y=2x+1 \text{ 或 } y=-2x-3。$$

(二)应用函数的对应关系判断二函数是否一致

例3 已知$f(x)=x^2$，$g(x)=2x-5$，比较 $f(g(x))$ 与$g(f(x))$是否一致。(六年制重点中学高中课本《代数》第二册P_{80}第31题)

解：因为$f(\square)=(\square)^2$，$g(\square)=2\times\square-5$，

所以 $f(g(x))=[g(x)]^2=(2x-5)^2$，

$g(f(x))=2f(x)-5=2x^2-5$。

显然，$f(g(x))$与$g(f(x))$不一致。

(三)求方程的解

例4 已知 $f(x)=\dfrac{x-2}{x+2}$，求满足$f\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)=-\dfrac{x}{2}$的实数解$x$。

解：因为 $f(\square)=\dfrac{\square-2}{\square+2}$，所以

$$f\left(\frac{x-2}{x+2}\right)=\frac{\dfrac{x-2}{x+2}-2}{\dfrac{x-2}{x+2}+2}=\frac{x-2-2x-4}{x-2+2x+4}=-\frac{x+6}{3x+2}.$$

由已知 $f\left(\frac{x-2}{x+2}\right)=-\frac{x}{2}$得

$-\frac{x+6}{3x+2}=-\frac{x}{2}$. 解得$x=\pm 2$.

又因$x=-2$，$f(x)$无意义，所以$x=2$.

(四)求函数图象的交点问题

例5 已知 $f(x)=kx+b(k\neq 0,1$. 求证$y=f(x)$与$y=f[f(x)]$的图象的交点在$y=f\{f[f(x)]\}$的图象上.

解：$f(x)=kx+b(k\neq 0,1)$ (1)

$f[f(x)]=kf(x)+b=k^2x+kb+b$ (2)

$f\{f[f(x)]\}=k\{f[f(x)]\}=k^3x+k^2b+kb+b$ (3)

由(1)、(2)得 $y=f(x)$与$y=f[f(x)]$的图象的交点坐标：

$$x=\frac{b}{1-k},$$

$$y=\frac{kb}{1-k}+b=\frac{b}{1-k}$$

将 $x=\frac{b}{1-k}$代入(3)式右端

$$k^3\left(\frac{b}{1-k}\right)+k^2b+kb+b=\frac{k^3b+k^2b-k^3b+kb-k^2b+b-kb}{1-k}$$

$$=\frac{b}{1-k}=y.$$

即交点坐标满足(3) 式。

因此，$y=f(x)$与$y=f[f(x)]$的交点在 $y=f\{f[f(x)]\}$的图象上。

四. 试题类型与解题方法

(一)求函数的定义域

例1 (85年长沙市竞赛题)

函数 $y=\arcsin\left(\lg\frac{x}{10}\right)$的定义域是——。

解： 显然，实数x应满足

$$-1\leqslant\lg\frac{x}{10}\leqslant 1.$$

解得 $1\leqslant x\leqslant 100$.

因此，所求函数的定义域是$[1,100]$.

例2 (78年武汉市竞赛题)

指出函数$y=\dfrac{\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(2^{-1}-x)}}{2^{\frac{x}{x-1}}-2^{\frac{x}{1-x}}}$的定义域。

解： 因为实数x应满足下列条件

$$\log_{\frac{1}{2}}(2^{-1}-x)\geqslant 0 \quad (1)$$

$$x-1\neq 0 \quad (2)$$

$$\frac{x}{x-1}\neq\frac{x}{1-x} \quad (3)$$

由(1) 有 $-\frac{1}{2}\leqslant x<\frac{1}{2}$.

由(2)、(3)知$x\neq 1$, $x\neq 0$.

于是有 $-\frac{1}{2}\leqslant x<0$, $0<x<\frac{1}{2}$.

因此，所求函数的定义域为$\left[-\frac{1}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

例3 (62年上海市竞赛题)

$$4y-x=\sqrt{x^2-2x+10y-4xy-1}$$

决定$y=f(x)$的定义域及图象.

解：若 $x^2-2x+10y-4xy-1\geqslant 0$ (1)

则有 $(4y-x)^2=x^2-2x+10y-4xy-1$.

于是有 $16y^2+(-4x-10)y+2x+1=0$,

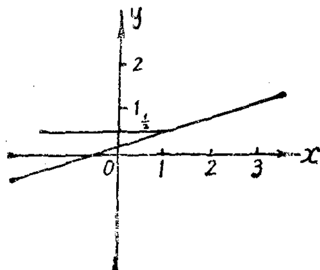
$(8y-2x-1)(2y-1)=0$.

解得 $y=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}$.

将 $y=\frac{1}{2}$代入(1) 时，

有$(x-2)^2\geqslant 0$

因而当 $y=\frac{1}{2}$时，x 为任意实数.



(图3-2)

将 $y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}$代入

(1) 时，得 $\frac{1}{4}\geqslant 0$。从而x为任意实数。

综上可知，函数$y=f(x)$的定义域为实数集，其图象如图3-2。

例4 (87年武汉市数学夏令营试题)

已知函数 $f(x)=\frac{1+x}{1-x}$的定义域为α，$f(f(x))$的定义域为β，则$\alpha\cap\beta=$(　　　　)。

解：因为 $f(x)=\frac{1+x}{1-x}$，

$$f(f(x))=\frac{1+f(x)}{1-f(x)}=\frac{1+\frac{1+x}{1-x}}{1-\frac{1+x}{1-x}}=-\frac{1}{x},$$

所以 $\alpha=\{x|1-x\neq 0\}$，$\beta=\{x|x\neq 0\}$。

因此 $\alpha\cap\beta=\{x|1-x\neq 0\text{且}x\neq 0\}=\{x|x(1-x)\neq 0\}$。

例5 (78年全国竞赛题)

已知 $y=\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{x+3}$，问当$x$为何值时

(1) $y>0$；　　　　(2) $y<0$。

解：函数 $y=\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{x+3}$的定义域由$x+3>0$确定，即其定义域为$(-3, +\infty)$。

又知 $0<\frac{1}{\sqrt{2}}<1$，于是有

(1) 若$y=\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{x+3}>0$，则$\frac{1}{x+3}<1$，有$x+3>1$，

即$x>-2$；

(2) 若$y=\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{x+3}<0$，则$\frac{1}{x+3}>1$，有$x+3<1$，

即$x<-2$。

再根据上面求得的函数定义域便知：当$x>-2$时，$y>0$；当$-3<x<-2$时，$y<0$。

例 6 (57年上海市竞赛题)

当x为何值时，$\sqrt{\lg\sqrt{\lg\sqrt{\lg\sqrt{\lg\sqrt{\lg\sqrt{\lg x}}}}}}$才有意义。

解：要使所给函数有意义，应有

$$\lg\sqrt{\lg\sqrt{\lg\sqrt{\lg\sqrt{\lg\sqrt{\lg x}}}}}\geqslant 0$$

于是 $\sqrt{\lg\sqrt{\lg\sqrt{\lg\sqrt{\lg\sqrt{\lg x}}}}}\geqslant 1$，

平方 $\lg\sqrt{\lg\sqrt{\lg\sqrt{\lg\sqrt{\lg x}}}}\geqslant 1$，

$$\sqrt{\lg\sqrt{\lg\sqrt{\lg\sqrt{\lg x}}}}\geqslant 10,$$

平方 $\lg\sqrt{\lg\sqrt{\lg\sqrt{\lg x}}}\geqslant 10^2$

$$\sqrt{\lg\sqrt{\lg\sqrt{\lg x}}}\geqslant 10^{10^2}$$

平方 $\lg\sqrt{\lg\sqrt{\lg x}}\geqslant(10^{10^2})^2=10^{2\cdot 10^2}$

$$\sqrt{\lg\sqrt{\lg x}} \geqslant 10^{10^{2\cdot 10^{2}}}$$

平方 $\qquad \lg\sqrt{\lg x} \geqslant 10^{2\cdot 10^{2\cdot 10^{2}}}$

$$\sqrt{\lg x} \geqslant 10^{10^{2\cdot 10^{2\cdot 10^{2}}}}$$

平方 $\qquad \lg x \geqslant 10^{2\cdot 10^{2\cdot 10^{2\cdot 10^{2}}}}$

$$x \geqslant 10^{10^{2\cdot 10^{2\cdot 10^{2\cdot 10^{2}}}}}$$

因此，当 $x \geqslant 10^{10^{2\cdot 10^{2\cdot 10^{2\cdot 10^{2}}}}}$ 时，所给函数有意义．

（二）求函数的值（域）

例 1 （78年武汉市竞赛题）

已知关于x的六次实系数多项式函数

$f(x)=x^6-\sqrt{2}x^5-x^4+x^3-2\sqrt{3}x^2+2x-\sqrt{2}$，

求$f(\sqrt{2}+\sqrt{3})$的值．

解： 因为$f(x)=(x^6-2\sqrt{2}x^5)-x^4+(x^3-2\sqrt{3}x^2)$

$$+2x-\sqrt{2}$$

$$=x^4x(x-2\sqrt{2})-x^4+xx(x-2\sqrt{3})+2x-\sqrt{2},$$

所以，$f(\sqrt{2}+\sqrt{3})=(\sqrt{2}+\sqrt{3})^4(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

$$(\sqrt{3}-\sqrt{2})-(\sqrt{2}+\sqrt{3})^4+(\sqrt{2}+$$

$$\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})+2(\sqrt{2}$$

$$+\sqrt{3})-\sqrt{2}=\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{2},$$

于是，$f(\sqrt{2}+\sqrt{3})=\sqrt{3}$。

例 2　（77年美国纽约竞赛题）

对于一切实数x及y，函数f满足$f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)$，并且$f(0)\neq 0$，求$f(1977)$的值。

解： 由题设有　$f(0)=f(0\cdot x)=f(0)\cdot f(x)$，

$$\text{并且}\quad f(x)=\frac{f(0)}{f(0)}=1,$$

所以　$f(1977)=1$。

例 3　（77年美国纽约竞赛题）

设对于一切$x>0$及一切$y>0$，函数f满足$f(x\cdot y)=f(x)+f(y)$，设$f(2)=a$，$f(3)=b$，求以a及b表示$f(72)$的值。

解： 由题设有

$f(72)=f(9\times 8)=f(9)+f(8)=f(3\times 3)+f(4\times 2)$
$=2f(3)+f(4)+f(2)=2f(3)+3f(2)=3a+2b$。

例4　（77年安徽省竞赛题）

当x为一切实数时，求$y=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$的数值范围。

解： 因为$y_1=x^2+x+1$的判别式$\Delta_1<0$，而二次项系数$1>0$，所以$y_1>0$；

又因$y_2=x^2-x+1$的判别式$\Delta_2<0$，且其二次项系数$1>0$，所以$y_2>0$。

于是，当x为一切实数时有$y=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}>0$。

$$(y-1)x^2+(y+1)x+(y-1)=0$$
$$\Delta=(y+1)^2-4(y-1)^2=(3y-1)(3-y)\geqslant 0.$$

则有　　$\frac{1}{3}\leqslant y\leqslant 3$.

即是，所求y的数值范围是$\left[\frac{1}{3},\ 3\right]$.

例5　（78年河南省竞赛题）

若x、y都是实数，且$y=\frac{\sqrt{x^2-4}+\sqrt{4-x^2}}{x+2}$，

求$\log_{\sqrt{2}}(x+y)$的值.

解：因为x、y都是实数，所以应有$x^2-4\geqslant 0$，$4-x^2\geqslant 0$，且$x+2\neq 0$。

即有　$x^2-4\geqslant 0$，$x^2-4\leqslant 0$，$x+2\neq 0$.

因此，$x^2-4=0$且$x+2\neq 0$，

解得　$x=2$，从而$y=0$.

于是　$\log_{\sqrt{2}}(x+y)=\log_{\sqrt{2}}2=2$.

例6　（第28届国际数学竞赛候选题）

设f是满足下列条件的函数：

（Ⅰ）若$x>y$且$f(y)-y\geqslant v\geqslant f(x)-x$，则对$x$，$y$之间的某个数$z$有$f(z)=v+z$；

（Ⅱ）方程$f(x)=0$至少有一个解，且方程的解中有一个解不小于其它所有解；

（Ⅲ）$f(0)=1$；

（Ⅳ）$f(1987)\leqslant 1988$；

（Ⅴ）$f(x)\cdot f(y)=f(x\cdot f(y)+y\cdot f(x)-xy)$.

求$f(1987)$.

解：（1）由（Ⅱ）知$f(x)=0$至少有一个解．不妨设u是$f(x)$的一个解.

(2) 设$u>0$。

(3) 由(Ⅰ)和(Ⅲ)知，在0和u之间存在一个数z，使得$f(z)=z$。

(4) 由(Ⅴ)得到：$0=f(z)\cdot f(u)=f(z\cdot f(u)+u\cdot f(z)-uz)=f(0)=1$，矛盾。

(5) 因此，由(Ⅲ)得$u<0$。

(6) 由(Ⅱ)知，在$f(x)=0$的解中，有一个解x_0不小于其它所有解。

(7) 由(5)得$x_0<0$。

(8) 由(Ⅴ)得$f(x)\cdot f(x_0)=f(x\cdot f(x_0)+x_0\cdot f(x)-xx_0)$，

即$0=f(x_0\cdot(f(x)-x))$，x可以是任意的数。

(9) 由(6)得$x_0\geqslant x_0\cdot(f(x)-x)$。又因$x_0<0$，可将不等式改写成$f(x)-x\geqslant 1$。

(10) 由(Ⅳ)和(9)得到$f(1987)\leqslant 1988\leqslant f(1987)$。

因此有 $f(1987)=1988$。

例7 (第19届国际中学生数学竞赛题)

设$f(n)$是一个自然数集上定义，并在这个数集中取值的函数。

试证： 如果对于每一个n值，不等式$f(n+1)>f(f(n))$都成立的话，那么对于每一个n值，等式$f(n)=n$都成立。

证明： 我们先证明一个命题：对于任意自然数k，只要$n\geqslant k$，则$f(n)\geqslant k$。

事实上，当$k=1$时，由于1是$f(n)$的值域中最小的数，所以命题显然成立。

假设命题对于自然数k成立。当$n\geqslant k+1$时，$n-1\geqslant k$，由

假设$f(n-1)\geqslant k$，当然$f(f(n-1))\geqslant k$。再由已知有$f(n)>f(f(n-1))$，因而$f(n)>k$，由此推出$f(n)\geqslant k+1$。这样，我们便证明了当$n=k+1$时，命题也成立。

综上便知，对于任意自然数k与任何大于或等于k的自然数n，不等式$f(n)\geqslant k$成立。

特别地取$k=n$，则有$f(n)\geqslant n$　　　　　　(1)

再令$n=f(k)$，则由(1)得$f(f(k))\geqslant f(k)$

又因$f(k+1)>f(f(k))$，于是$f(k+1)>f(k)$。

这就表明，函数$f(k)$是单调递增函数。

由于对任意自然数n有$f(n+1)>f(f(n))$，

根据$f(k)$是单调递增函数得$n+1>f(n)$，从而有　$f(n)\leqslant n$　　　　　　(2)

由(1)、(2)两式得　$f(n)=n$。

（三）求函数表达式

例1　（79年安徽省竞赛题）

求一个一次函数$f(x)$，使得

$$f\{f[f(x)]\}=8x+5.$$

解：设所求一次函数为$f(x)=ax+b(a\neq 0)$，

则有$f\{f[f(x)]\}=a[a(ax+b)]+b=a^3x+b(a^2+a+1)$

由$f\{f[f(x)]\}=8x+7$，得

$$a^3x+b(a^2+a+1)=8x+7.$$

因此，$a^3=8$，$b(a^2+a+1)=7$，

即　$a=2$，$b=1$。

故所求一次函数是$f(x)=2x+1$。

例2　（79年陕西省竞赛题）

已知$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，$\varphi(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$。

令 $f_n(x)=\underbrace{f\{f[\cdots f}_{n\text{个}}(x)]\}$，

$\varphi_n(x)=\underbrace{\varphi\{\varphi[\cdots\varphi}_{n\text{个}}(x)]\}$。

(1) 把$f_n(x)$及$\varphi_n(x)$直接用x表达出来；

(2) 用$f(x)$表出$\dfrac{f_n(x)}{\varphi_n(x)}$；

(3) n大于什么数值时，$\varphi_n(x)$的定义域全部落在区间$\left[-\dfrac{1}{10},\ \dfrac{1}{10}\right]$内？

解：(1) $f[f(x)]=\dfrac{f(x)}{\sqrt{1+(f(x))^2}}=\dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{1+x^2}}}$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}};$$

同理，$f\{[f(x)]\}=\dfrac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$；

……

于是，$f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$。

同样得$\varphi_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-nx^2}}$。

(2) 因为$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，所以$(f(x))^2=\dfrac{x^2}{1+x^2}$，

$$x^2[1-(f(x))^2]=(f(x))^2.$$

$$x^2=\frac{(f(x))^2}{1-(f(x))^2}$$

则 $$\frac{f_n(x)}{\varphi_n(x)}=\frac{\sqrt{1-n\frac{(f(x))^2}{1-(f(x))^2}}}{\sqrt{1+n\frac{(f(x))^2}{1-(f(x))^2}}}=\frac{\sqrt{1-(n+1)[f(x)]^2}}{\sqrt{1+(n+1)[f(x)]^2}}.$$

（3）要想决定$\varphi_n(x)$的定义域，必有$1-nx^2>0$，或$x^2<\frac{1}{n}$，即 $|x|<\frac{1}{\sqrt{n}}$.

当$n\geqslant 100$时，$|x|<\frac{1}{10}$. 故当$n\geqslant 100$时，$\varphi_n(x)$的 定 义域全部落在$\left(-\frac{1}{10},\ \frac{1}{10}\right)$内。

例 3　（第24届国际数学竞赛题）

试找出所有满足下列条件的定义在正实数集上并取正实数值的函数f：

（i）对于任意正实数x、y恒有

$$f(xf(y))=yf(x);$$

（ii）当$x\to+\infty$时，$f(x)\to 0$。

解：设f是满足题设条件的函数. 则有

（1）$f(1)=1$，即 1 是 函数f 的一个不 动点. 这是因 为由条件(i)可得

$$1=\frac{1}{f(1)}\cdot f(1)=f\left[1\cdot f\left(\frac{1}{f(1)}\right)\right]\text{（在(i)中 令}x=1,\ y=\frac{1}{f(1)}\text{）}=f\left[f\left(\frac{1}{f(1)}\cdot f(1)\right)\right]$$

（在(i) 中 令$x=\frac{1}{f(1)}$，$y=1$）

$=f[f(1)]=f[1\cdot f(1)]=1\cdot f(1)$

（在(i)中令$x=y=1$）

$=f(1)$。

(2) 如果a，b是f的不动点，则ab与$\frac{1}{a}$亦然。

因为a，b是f的不动点，即有 $f(a)=a$，$f(b)=b$，于是

$$1=f(1)=f\left(\frac{1}{a}\cdot a\right)=f\left(\frac{1}{a}f(a)\right)\quad(由(i))=af\left(\frac{1}{a}\right).$$

即 $f\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{a}$，于是$\frac{1}{a}$是$f$的不动点。

又由　$f(ab)=f(af(b))\overset{(i)}{=\!=}bf(a)=ba=ab$。

可知　ab也是f的不动点。

(3) f有唯一的不动点1。若f有不动点$a\neq 1$，则由(2)，$\frac{1}{a}$亦为f之不动点。于是不失普遍性可设$a>1$。又由(2)，$a\cdot a=a^2$，$a\cdot a^2=a^3$，…，a^n，…都是f的不动点，即对任意的正整数n都有$f(a^n)=a^n$。据条件(ii)又有

$$0=\lim_{n\to\infty}f(a^n)=\lim_{n\to\infty}a^n=+\infty$$

矛盾。

(4) 仅有的满足条件的函数为$f(x)=\frac{1}{x}$。

由条件(i)，对任意的x有$f(xf(x))=xf(x)$，即$xf(x)$为f之不动点，据(3) 得$xf(x)=1$，即$f(x)=\frac{1}{x}$。

例 4 （27届国际数学竞赛题）

f为定义于非负实数集上的且取非负实数值的函数，求所有满足下列条件的f：

(1) $f(xf(y))f(y)=f(x+y)$，

(2) $f(2)=0$，

(3) $f(x)\neq 0$，$0\leqslant x<2$。

解：从上列三个条件看，麻烦的是条件(1)中的$f(xf(y))$，为了先避开这个麻烦，可让$f(y)=0$。由(2)，取$y=2$代入(1)得$0=f(x+2)$。又因$x\geqslant 0$，所以$x+2\geqslant 2$.这说明：当$y\geqslant 2$时，$f(y)=0$。再由(3)知：当$f(y)=0$时$y\geqslant 2$。

如上所述，只要让$f(xf(y))=0$，就可以推断$xf(y)\geqslant 2$；而如果$f(xf(y))\neq 0$，就有$xf(y)<2$。于是，我们就从麻烦的复合函数解脱出来。

当$f(xf(y))=0$时，由(1)也有$f(x+y)=0$.这就是说，当$xf(y)\geqslant 2$时，也有$x+y\geqslant 2$。反之，当$f(x+y)=0$时，由(1)有$f(y)=0$或$f(xf(y))=0$。这就是说，当$x+y\geqslant 2$时，有$y\geqslant 2$或$xf(y)\geqslant 2$。

上面已经证得$y\geqslant 2$时$f(y)=0$。现在只要考虑$0\leqslant y<2$的情形。那么不等式$xf(y)\geqslant 2$和$x+y\geqslant 2$就可以互推，即$x\geqslant\frac{2}{f(y)}$与$x\geqslant 2-y$是同一个不等式，所以$\frac{2}{f(y)}=2-y$,也就是$f(y)=\frac{2}{2-y}$。

综上可知，所求函数是

$$f(x)=\begin{cases}0 & (x\geqslant 2)\\ \dfrac{2}{2-x} & (0\leqslant x<2)\end{cases}$$

例 5 （第28届国际数学竞赛题）

求证：不存在这样一个函数f：$N_0 \to N_0$，$N_0=\{0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\}$，使得对于任何$n \in N_0$，$f[f(n)]=n+1987$。

证明（反证法）：设对任何$n \in N_0$有

$$f[f(n)]=n+1987 \tag{1}$$

$f(n) \in N_0$可用来代替上式中的n，得

$$f[f(f(n))]=f(n)+1987。$$

而这里方括号内的$f(f(n))$即(1)的左边，又可用(1)的右边代换而得

$$f(n+1987)=f(n)+1987 \tag{2}$$

再用$n+1987$代换这里的n得

$$f[n+1987\times 2]=f(n+1987)+1987(2)[f(n)+1987]+1987=f(n)+1987\times 2.$$

递推得 $f(n+1987m)=f(n)+1987m \qquad (m \in N_0)$。

现在取非负整数$i<1987$，并设$f(i)$被1987除得整商k余数j，即

$$f(i)=1987k+j \qquad (0 \leqslant j<1987).$$

那么 $f[f(i)]=f(j+1987k)$.

由(1)、(2)得 $i+1987=f(j)+1987k$,

即 $i=f(j)+1987(k-1)$.

这就是说，若$f(i)$被1987除的余数是j，则$f(j)$被1987除的余数是i. 于是，在所有余数0，1，…，1986中可以配成这样的对子(i, j)；而余数有奇数个，所以其中必有某个自己配对. 设为(n, n). 于是可设

$$f(n)=n+1987k, \tag{3}$$

则 $f[f(n)]=f(n+1987k)$,

即　$n+1987=f(n)+1987k$,

亦即　$f(n)=n-1987(k-1)$.　　(4)

比较　(3)、(4)得

$$1987k=-1987(k-1)$$

则　$2k=1$，这是显然不成立的。

综上可知，命题为真。

第　四　讲

数学竞赛中的函数性质问题

函数的单调性、奇偶性、有界性、周期性和极值性的意义是大家熟知的．对此，我们在这里只讲述如何判定函数性质的问题．为了有效地解答有关数学竞赛试题，我们先补充介绍一些基本知识，然后再对竞赛题的类型和解法作一阐述．

一、函数性质的判定

（一）单调性

定理1． 设$f(x)$在区间I_1与I_2上都分别单调递增（或递减）且$I_1\cap I_2\neq\varnothing$，则$f(x)$在其并$I_1\cup I_2$上也是单调递增（或递减）的．

定理2． 设$y=f(x)$在区间I上是严格递增（严格递减）函数，又$f(x)$的值域为E，则它的反函数$x=f^{-1}(y)$存在，且$f^{-1}(y)$在E上也是严格递增（严格递减）函数．

关于复合函数单调性的判别法，有

定理3． 设函数$y=f(u)$，$u=\varphi(x)$　$(x\in A,\ u\in B)$

（1）若$y=f(u)$与$u=\varphi(x)$的单调性相同（即同为递增函数或同为递减函数），则$F(x)=f[\varphi(x)]$是增函数；

（2）若$y=f(u)$与$u=\varphi(x)$的单调性相反（即一为增函

数，另一个为减函数），则$F(x)=f[\varphi(x)]$是减函数。

证明：(1) 设$y=f(u)$，$u=\varphi(x)$都是增函数。

x_1，$x_2\in A$且$x_1<x_2$，则$\varphi(x_1)<\varphi(x_2)$，且$\varphi(x_1)$、$\varphi(x_2)\in B$，于是$f[\varphi(x_1)]<f[\varphi(x_2)]$，即$f(x_1)<F(x_2)$。因而$F(x)=f[\varphi(x)](x\in A)$是增函数。

对于$y=f(u)$，$u=\varphi(x)$都是减函数的情形，同理可证。

(2) 设$y=f(u)$是增函数，$u=\varphi(x)$是减函数。

若x_1、$x_2\in A$，$x_1<x_2$，则$\varphi(x_1)>\varphi(x_2)$且$\varphi(x_1)$、$\varphi(x_2)\in B$，于是$f[\varphi(x_1)]>f[\varphi(x_2)]$，即$F(x_1)>F(x_2)$。因而，$F(x)=f[\varphi(x)](x\in A)$是减函数。

对于$y=f(u)$是减函数，$u=\varphi(x)$是增函数的情形，同理可证。

注：由上述定理的证明，不妨说复合函数单调性的判定法则："同向"为增，"异向"为减；好似有理数乘法法则："同号"为正，"异号为负"。

例1 函数$y=f(x)=\log_{0.5}(x^2+4x+4)$在什么区间上是增函数。(84年高考题)

解：因为$x^2+4x+4=(x+2)^2\geqslant 0$，当$x=-2$时取等号，所以$x\in(-\infty,\ -2)\cup(-2,\ +\infty)$。

令$y=f(u)=\log_{0.5}u$，$u=x^2+4x+4$。

由于$f(u)$在正实数集R^+上是减函数，$u=x^2+4x+4$在$(-\infty,\ -2)$上是减函数，在$(-2,\ +\infty)$上是增函数，因此，根据上述定理或法则便知

$$y=f(x)=\log_{0.5}(x^2+4x+4)$$

在$(-\infty,\ -2)$上是增函数。

注，例1还可应用定义或导数的方法证明，函数$y=f$

$(x)=\log_{0.5}(x^2+4x+4)$在$(-\infty,\ -2)$上是增函数。

证法一： 若x_1、$x_2\in(-\infty,\ -2)$，$x_1<x_2$，则

$$f(x_2)-f(x_1)=\log_{0.5}(x_2^2+4x_2+4)-\log_{0.5}(x_1^2+4x_1+4)=\log_{0.5}\frac{x_2^2+4x_2+4}{x_1^2+4x_1+4}=\log_{0.5}\left(\frac{x_2+2}{x_1+2}\right)^2.$$

因为$x_1+2<x_2+2<0$，所以

$$0<\frac{x_2+2}{x_1+2}<1,\quad 0<\left(\frac{x_2+2}{x_1+2}\right)^2<1.$$

根据对数的性质：当$a=0.5<1$，真数$0<\left(\frac{x_2+2}{x_1+2}\right)<1$时有 $f(x_2)-f(x_1)=\log_{0.5}\left(\frac{x_2+2}{x_1+2}\right)^2>0$.

即当$x_1<x_2$时，有$f(x_1)<f(x_2)$

则 $y=f(x)=\log_{0.5}(x^2+4x+4)$在$(-\infty,\ -2)$上是增函数。

证法二： 求导数，有

$$f'(x)=\frac{2(x+2)}{(x+2)^2\ln_{0.5}}=\frac{2}{(x+2)\ln_{0.5}}.$$

因为 $x\in(-\infty,\ -2)$时，$x+2<0$，且$\ln0.5<0$，

所以 $f'(x)=\frac{2}{(x+2)\ln0.5}>0$.

根据一阶导数的符号判断函数单调性的定理得到 $f(x)=\log_{0.5}(x^2+4x+4)$在$(-\infty,\ -2)$上是增函数。

注： 上面的证法一是基本的证明方法；证法二是较简捷的方法。

关于初等函数单调区间的端点问题。

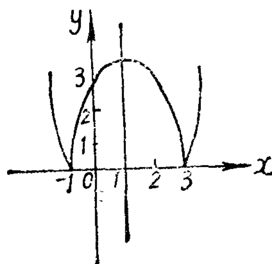
(1) 若$f(x)$在某区间上具有单调性，且在区间的两个端点有定义，则这时的单调区间应是闭区间。

例1 求$f(x)=|x^2-2x-3|$的单调区间。

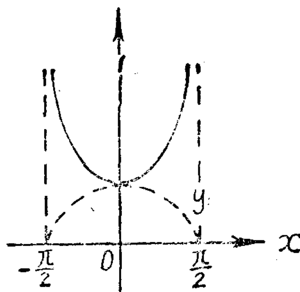
解： $f(x)=|x^2-2x-3|=\begin{cases} x^2-2x-3 & x\in(-\infty,-1]\cup[3,+\infty) \\ -x^2+2x+3 & x\in(-1,3] \end{cases}$

由图4-1知，当$x=-1$，1，3时$f(x)$都有定义。因而，$f(x)$的单调递增区间是$[-3, +\infty]$和$[-1, 1]$；单调递减区间是$(-\infty, -1)$和$(1, 3)$。

(2) 若$f(x)$在某区间具有单调性，且在区间的一个端点无定义，则这个单调区间是半开半闭区间。



(图4-1)



(图4-2)

例2 求$f(x)=\frac{1}{\cos x}$，$x\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$的单调区间。

解：$f(x)=\dfrac{1}{\cos x}=\sec x$ 在 $x=\pm\dfrac{\pi}{2}$ 时无定义，在 $x=0$ 时有定义（图4-2）

显然，$f(x)$ 的单调增区间是 $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$，单调减区间是 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\ 0\right]$。

(3) 若 $f(x)$ 在某区间具有单调性，且在区间的两个端点无定义，则这个单调区间应是开区间。

例 3 求 $f(x)=\lg(1-x^2)$ 的单调区间。

解 显然，当 $x=\pm1$ 时，$f(x)$ 无定义。要 $f(x)$ 有意义，应有 $1-x^2>0$，即 $-1<x<1$。

令 $u=1-x^2$，则原函数由 $f(u)=\lg u$，$u=1-x^2$ 复合而成。

当 $x\in(-1,\ 0]$ 时，$u=1-x^2$ 是增函数，且 $f(u)$ 也是增函数，则由复合函数单调性的判别法知 $f(x)=\lg(1-x^2)$ 在 $(-1,\ 0]$ 上是增函数，因而 $(-1,\ 0]$ 是 $f(x)$ 的单调增区间。

同理可知，$f(x)$ 在 $[0,\ 1)$ 上是增函数，因而 $[0,\ 1)$ 是 $f(x)$ 的单调减区间。

2. 奇偶性

函数奇偶性的判定，常用下列定理：

定理(1) 两个偶（奇）函数的和或差，仍是偶（奇）函数；

(2) 两个偶（奇）函数的积是偶函数；

(3) 一个偶函数与一个奇函数的积是奇函数；

(4) 函数$f(x)$与$\frac{1}{f(x)}$具有相同的奇偶性。

注：由于定理各条的证明方法类似，这里仅证(3)。

证明(3)。设$f(x)$为奇函数，其定义域为D_1；$\varphi(x)$为偶函数，其定义域为D_2。于是，

$x\in D_1$　有　$f(-x)=-f(x)$；

$x\in D_2$　有　$\varphi(-x)=\varphi(x)$。

因而，$x\in D_1\cup D_2$，有$f(-x)\varphi(-x)=-f(x)\varphi(x)$，

即对函数$f(x)\varphi(x)$定义域里的一切x有上式成立。因此，函数$f(x)\varphi(x)$是奇函数。

例1　研究函数$y=\frac{x^2+\cos x}{x^2-\cos x}$的奇偶性。

解：由于x^2与$\cos x$都是偶函数，据定理(1)知$x^2+\cos x$与$x^2-\cos x$都是偶函数。

又由定理(4)知$\frac{1}{x^2-\cos x}$是偶函数。

于是据定理(2)知$y=\frac{x^2+\cos x}{x^2-\cos x}$是偶函数。

函数奇偶性的判定，常用下述方法。

定义法

就是考查：任取自变量的一个值，$f(-x)$是否有意义：若存在属于定义域的一个x_0使得$f(-x_0)$没有意义，则$f(x)$既不是奇函数也不是偶函数；若属于定义域的任意x均使$f(-x)$有意义，则应进一步寻求$f(-x)$与$\pm f(x)$是否相等，进而作出解答的结论。

值得一提的是，有时为了运算上的方便，将验证$f(-x)$

$= \pm f(x)$，转化为验证

$$f(x) \pm f(-x) = 0, \quad \frac{f(x)}{f(-x)} = \pm 1;$$

$$f(x) + f(-x) = \begin{cases} 0 \\ 2f(x). \end{cases}$$

根据验证的不同情况，容易作出相应的不同结论.

例 2 确定下列函数的奇偶性.

(1) $f_1(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} + x)$，(2) $f_2(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$，

(3) $f_3(x) = \sqrt{\cos 2\pi x - 1}$，(4) $f_4(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$.

解：(1) $f_1(x)$的定义域是$(-\infty, +\infty)$，对任意$x \in (-\infty, +\infty)$都有

$$\begin{aligned} f_1(x) + f_1(-x) &= \ln(\sqrt{x^2+1} + x) + \ln(\sqrt{x^2+1} - x) \\ &= \ln[(\sqrt{x^2+1} + x)(\sqrt{x^2+1} - x)] = \ln 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

因此，$f_1(x)$是奇函数.

(2) $f_2(x)$的定义域是$(-\infty, +\infty)$，$f(0) = 0$，且当$x \neq 0$时，有 $\dfrac{f_2(x)}{f_2(-x)} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \cdot \dfrac{e^{-x} + e^x}{e^{-x} - e^x} = -1$.

于是，$f_2(x)$是奇函数.

(3) $f_3(x)$的定义域为整数集Z，且对任意$x \in Z$有$f_3(x) \equiv 0$，从而$f_3(x) \pm f_3(-x) = 0$.

因而，$f_3(x)$既是奇函数又是偶函数.

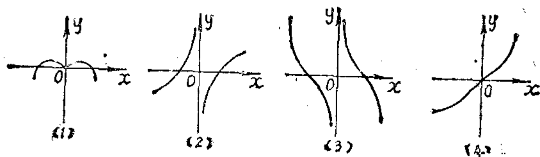
(4) $f_4(x)$的定义域为实数集R，且对任意$x \in R$有$f_4(x) \equiv 1$，从而$f\ (x) - f_4(-x) = 0$.

故此，$f_4(x)$是偶函数.

图象法

应用定理：函数为奇(偶)函数的充要条件是图象关于原点(纵坐标轴)对称，再由函数图象的特征，便可判定函数的奇偶性。

例 3 根据绘出的函数图象，判定其奇偶性：



(图4—3)

解：显然，(1) 为偶函数；(2) 与(3) 为奇函数；(4) 为非奇非偶函数。

注：如果函数的定义域关于原点不对称，那么这个函数既不是奇函数也不是偶函数；如果函数的定义域关于原点对称，那么这个函数的奇偶性或由其图象而定，或由验证$f(x)=\pm f(-x)$而定。

例 4 研究下列函数的奇偶性

(1) $f_1(x)=\dfrac{1}{1+x}$； (2) $f_2(x)=\dfrac{x+x^2}{x}$。

解：(1) 由于$f_2(x)$在$x=1$处有定义而在$x=-1$处没有意义，于是$f_1(x)$的定义域关于原点O不对称，因而$f_1(x)$既不是奇函数也不是偶函数。

(2) 虽然$f_2(x)$有关于原点O为对称的定义域，但由$f_2(x)$的图象易知它既不是奇函数也不是偶函数(当然，从$f_2(-x)$

$= -\frac{x^2-x}{x}$, $-f_2(-x)=\frac{x^2-x}{x}$ 有$f_2(-x)\neq\pm f_2(x)$，亦可知其结论)。

对称曲线法

奇偶函数图象的性质可以看作是一般曲线对称性的特例，把函数表达式改写为曲线方程$F(x, y)=0$，则有

偶函数 $\begin{cases}F(x, y)=0\\F(-x, y)=0\end{cases}$ 同时成立；

奇函数 $\begin{cases}F(x, y)=0\\F(-x, -y)=0\end{cases}$ 同时成立。

这个方法对于分段函数特别方便。

例 5 确定下列函数的奇偶性

(1) $f_1(x)=\begin{cases}x(1-x) & (x\geqslant 0)\\-x(1+x) & (x<0)\end{cases}$；

(2) $f_2(x)=\begin{cases}l_n x & (x>0)\\-l_n(-x) & (x<0)\end{cases}$；

(3) $f_3(x)=\begin{cases}\arccos[x(1-x)] & (x\geqslant 0)\\\arccos[-x(1+x)] & (x<0)\end{cases}$；

(4) $f_4(x)=\begin{cases}2^x & (x>0)\\-\frac{1}{2^x} & (x<0)\end{cases}$。

解：(1) 如果把$x\geqslant 0$时函数表达式改写为

$F(x, y)=y-x(1-x)=0$，设($y=f_1(x)$)

则知$x<0$时函数表达式应为

$$F(-x,\ y)=y+x(1+x)=0$$

因此，$f_1(x)$为偶函数。

注：此例还可用定义法、图象法、性质法(即根据前面所述定理)来求解.

(2) 变形：$f_2(x)=y=\frac{|x|}{x}\ln|x|$，于是

$$F(x,\ y)=y-\frac{|x|}{x}\ln|x|=0,$$

$$F(-x,\ -y)=-y+\frac{|x|}{x}\ln|x|=0.$$

因而，$f_2(x)$是奇函数。

(3) 变形：$f_3(x)=y=arccos(|x|-x^2)$，于是

$$F(x,\ y)=y-arccos(|x|-x^2)=0,$$

$$F(-x,\ y)=y-arccos(|x|-x^2)=0,$$

于是，$f_3(x)$为偶函数。

(4) 变形：$f_4(x)=y=\frac{|x|}{x}2|x|$，于是

$$F(x,\ y)=y-\frac{|x|}{x}2|x|=0,$$

$$F(-x,\ -y)=-y+\frac{|x|}{x}2|x|=0.$$

从而，$f_4(x)$ 为奇函数。

求导法

根据可微奇(偶)函数的导数为偶(奇)函数，反之亦成立的结论来判定函数奇偶性。

例 6 确定下列函数的奇偶性

(1) $f_1(x) = \ln\frac{1-x}{1+x}$,

(2) $f_2(x) = \ln(\sqrt{x^2+1}-x)$。

解: (1) $f_1'(x) = \frac{1}{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)_2}$

$= \frac{-2}{1-x^2}$,

显然, $f_1'(x)$为偶函数, 因而$f_1(x)$是奇函数。

(2) 因为$f_2'(x) = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}-1}{\sqrt{x^2+1}-x} = \frac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$

$\cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} = \frac{-1}{\sqrt{x^2+1}}$

是偶函数, 所以$f_2(x)$是奇函数。

3。有界性

由前面所讲函数有界性的意义可知, 要确定函数的有界性, 关键在于能否找出适合定义条件中的正数M。对于一些简单问题可应用观察法求解。

例 1 证明函数$f(x) = \frac{1}{x^2}$有下界而无上界。

证明: (1) 显然, 对于函数定义域的一切x值($x \neq 0$)都有$\frac{1}{x^2} > 0$, 因而 0 为$f(x)$的下界。

(2) 若$f(x)$有上界，则存在正数M，使得函数$f(x)$定义域里的任意x值都有$\frac{1}{x^2}<M$，但此不等式并不一定成立(例如，取$0<x<\frac{1}{\sqrt{M}}$)，因此，函数$f(x)$没有上界。

函数的有界性，也可借助它的最大值或最小值来进行讨论。

例 2 讨论函数$y=\frac{x}{x^2+1}$的有界性。

解： 由已知函数的表达式解得

$$x=\frac{1\pm\sqrt{(1-2y)(1+2y)}}{2y}$$

因为x为实数，所以$(1-2y)(1+2y)\geqslant 0$，

即 $-\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant\frac{1}{2}$。

当$y=-\frac{1}{2}$时，$x=-1$； 当$y=\frac{1}{2}$时$x=1$。

于是，当$x=-1$时函数$y=\frac{x}{x^2+1}$有最小值$-\frac{1}{2}$；

当$x=1$时函数$y=\frac{x}{x^2+1}$有最大值$\frac{1}{2}$。

从而， 函数$y=\frac{x}{x^2+1}$有界。

例 3 证明函数$f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}$有下界。

证明： 由于二正数x^2与$\frac{1}{x^2}$之积$x^2 \cdot \frac{1}{x^2}=1$是定数，则当二数相等时，即$x^2=\frac{1}{x^2}$，亦即$x=\pm 1$时，其和$x^2+\frac{1}{x^2}$有最小值2．从而函数$f(x)$有下界．

4．周期性

关于函数周期性问题，有下列定理：

定理1． 设T是周期函数$f(x)$的周期，D为$f(x)$的定义域，那么对于一切正整数n，当任意$x \in D$有$x \pm nT \in D$时，数$\pm nT$都是$f(x)$的周期．

定理2． 设$f(x)$是异于常数的周期函数，且其定义域为D．若$f(x)$在$x_0 \in D$处连续，则$f(x)$有最小正周期．

定理3． 设函数$f(x)$有最小正周期T，那么除$\pm nT(n=1, 2, \cdots)$外，函数$f(x)$无其它周期．

定理4． 设周期函数$f(x)$有最小正周期T，那么$f(\lambda x)$ $(\lambda \neq 0)$有最小正周期$\frac{T}{|\lambda|}$．

定理5． 设连续的周期函数$f_1(x)$与$f_2(x)$分别有最小正周期T_1和T_2，那么

（1）函数$f(x)=f_1(x)+f_2(x)$是周期函数的充要条件为$\frac{\pi}{T_2}$是有理数．

（2）设$\frac{T_1}{T_2}=\frac{m}{n}$为既约分数，则$f(x)$的最小正周期$T \leqslant nT_1(=mT_2)$．

定理6． 设连续周期函数$f_1(x)$与$f_2(x)$分别有最小正周期T_1和T_2。

(1) 若$f_1(x)>0$，$f_2(x)>0$，则

$f(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)$为周期函数的充要条件是$\frac{T_1}{T_2}$为有理数；

(2) 设$\frac{T_1}{T_2}=\frac{m}{n}$为既约分数，那么$f(x)$的最小正周期$T\leqslant nT_1(=mT_2)$。

定理7． 若内函数$u=\varphi(x)$是周期函数，外函数$f(u)$是任意函数，则其复合函数$f(\varphi(x))$是周期函数.

定理8． 设内函数$u=\varphi(x)$在数集D上有最小正周期T_0，外函数$f(u)$在数集$E=\{u|u=\varphi(x),\ x\in D\}$上严格单调，则其复合函数$f(\varphi(x))$在$D$上也有最小正周期$T_0$。

定理9． 若外函数$f(u)$是数集D上的周期函数，而内函数是线性函数$u=\varphi(x)=ax+b(a\neq0)$，则其复合函数$f(ax+b)$是$E=\{x|ax+b\in D,\ x是实数\}$上的周期函数；且若$f(u)$的最小正周期为$T$时，则$f(ax+b)$的最小正周期为$\frac{T}{|a|}$。

关于判定函数$y=f(x)$的周期性问题，这类题目有两类：一是证明某函数为周期函数；二是证明某函数不是周期函数。第一类问题我们可用周期函数的定义和上述定理来判定；第二类问题常用反证法（有时也用比值法和图示法）进行证明。

应用反证法的关键是利用等式$f(x+T)=f(x)$要求对函数$f(x)$定义域里的一切x都成立，假若存在周期T，然后根据这个等式推出明显的谬误或与周期函数性质相悖的结论。

例 1　证明函数$f(x)=\sin x^2$的非周期性.

证明：假若$f(x)=\sin x^2$是周期函数，其周期为T，则$\sin(x+T)^2=\sin x^2$对一切$x\in(-\infty,\ +\infty)$均成立.

现在分别取$x=0$，$\sqrt{\pi}$，$\sqrt{2\pi}$，则分别有$\sin T^2=0$，$\sin(\sqrt{\pi}+T)^2=0$，$\sin(\sqrt{2\pi}+T)^2=0$.由此推出$T^2=k\pi$，$(\sqrt{\pi}+T)^2=m\pi$，$(\sqrt{2\pi}+T)^2=n\pi$，其中k，m、n是正整数．从而解得$2\sqrt{k}=m-k-1$，$2\sqrt{2k}=n-k-2$．于是

$\sqrt{2}=\dfrac{n-k-2}{m-k-1}$．显然，此式右端是有理数，左端是无理数$\sqrt{2}$，得出矛盾.

综上可知：$f(x)=\sin x^2$不是周期函数.

另证：假若$f(x)$有周期T

因为对一切实数x有$f(-x)=f(x)$，所以有$f(T-x)=f(T+x)$对$x\in(-\infty,\ +\infty)$都成立．于是

$$\sin(T^2+x^2-2Tx)=\sin(T^2+x^2+2Tx).$$

因而对$x\in(-\infty,\ +\infty)$有

$$\begin{aligned}0&=\sin(T^2+x^2+2Tx)-\sin(T^2+x^2-2Tx)\\&=2\cos(T^2+x^2)\sin(2Tx)\end{aligned}$$

除非$T=0$，否则上式不成立，因此，$f(x)$不是周期函数.

比值法的根据是前面的定理 5 和定理 6．采用比值法的步骤是看比值$\dfrac{T_1}{T_2}$是否为无理数．若比值是无理数，则函数是非周期函数.

例 2　求证$f(x)=\cos 2x+\cos\sqrt{2}x$不是周期函数.

证明，设$f_1(x)=\cos 2x$，则其最小正周期$T_1=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$，

又设$f_2(x)=\cos\sqrt{2}x$，则其最小正周期$T_2=\frac{2\pi}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\pi$。

再由于$\frac{T_1}{T_2}=\frac{\pi}{\sqrt{2}\pi}=\frac{\sqrt{2}}{2}$是无理数，所以 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$即$f(x)=\cos 2x+\cos\sqrt{2}x$是非周期函数。

图示法是利用函数．$y=f(x)$的图象，一目了然地判定是否为周期函数。图示法主要适用于容易作图的一类函数。

例 3 讨论函数$f(x)=x\sin x$的周期性。

解：显然，$f(x)$的定义域为$(-\infty, +\infty)$。

因为$x\in(-\infty, +\infty)$有$f(-x)=f(x)$，所以$f(x)$是偶函数，因而只要画出函数$f(x)$当$\geqslant 0$的部分图形即可。

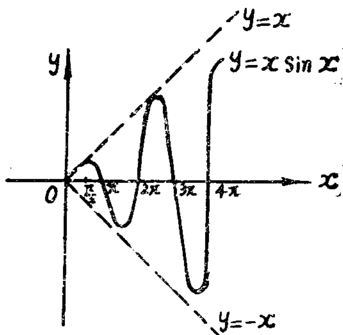


图4-4

由图 4-4 知，$f(x)=x\sin x$ 显然不是周期函数。

关于求函数 $y=f(x)$的最小正周期问题，这类题目就是在不知道所给函数的任一周期的情况下，如何求出函数的最小正周期，其常用方法有：

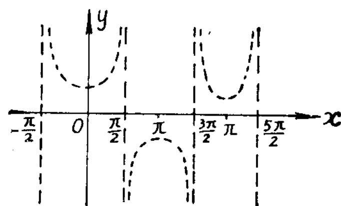
定义法

这种方法的基本思想是对所给函数的周期首先进行推测，大体估计一下最小正周期可能是什么，然后再对这个推测值进行理论证明。如何推测函数的周期？一可绘出函数图象，据此观察其最小正周期；二可根据所求函数与已知周期函数的关系推测其最小正周期。

例 4　求函数$f(x)=\dfrac{1}{\cos x}$的最小正周期

解(1) 推测：函数$f(x)=\dfrac{1}{\cos x}$是周期函数$\cos x$的倒数，由$\cos x$的最小正周期是2π，推测$f(x)=\dfrac{1}{\cos x}$的最小正周期也可能是2π.

除此，也可从函数$f(x)=\dfrac{1}{\cos x}$的图象上观察出它的最小正周期是2π。(图4-5)



(图4-5)

(2) 证明：若$f(x)$还有周期T，且$0<T<2\pi$，则有$\dfrac{1}{\cos(x+T)}=\dfrac{1}{\cos x}$。由于$f(x)=\dfrac{1}{\cos x}$的定义域为$x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in Z)$，所以应有

$$\cos(x+T)=\cos x \qquad 对一切x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)成立。$$

取$x=0$，得$\cos T=\cos 0=1(0<T<2\pi)$。这与$\cos x$在$(0,2\pi)$内$\cos x\neq 1$矛盾。

综上可知，2π是$f(x)=\frac{1}{\cos x}$的最小正周期。

恒等变形法

这种方法，就是把所要求的函数通过恒等变形化为已知周期函数。

例 5　求$f(x)=\sqrt{3}\sin 3x-\cos 3x-1$的最小正周期。

解：因为$f(x)=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x-\frac{1}{2}\cos 3x\right)-1$

$$=2\left(\sin 3x\cos\frac{\pi}{6}-\cos 3x\sin\frac{\pi}{6}\right)-1$$

$$=2\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)-1,$$

所以$f(x)$的最小正周期为$\frac{2}{3}\pi$。

最小公倍数法

运用前面的定理 5 和定理 6，首先求出$f_1(x)$和$f_2(x)$的最小正周期T_1、T_2的最小公倍数T，然后再验证$\frac{T}{K}(k=1,2,3,\cdots)$是否为$f(x)$的周期。若$\frac{T}{K}$是所求函数$f(x)$的周期，但$\frac{T}{K+1}$不是$f(x)$的周期，则得$\frac{T}{K}$为所求函数$f(x)$的最小正周期。

例 6　求$f(x)=\sin^n x+\cos^n x$（$n\in N$，$n\neq 2$）的最小正周期。

解：(1)当n为偶数时，有

$f(x)=\sin^n x+\cos^n x=|\sin x|^n+|\cos|^n$.

显然，$|\sin x|^n$的最小正周期$T_1=\pi$，$|\cos x|^n$的最小正周期$T_2=\pi$，T_1与T_2的最小公倍数$T=\pi$.

$$因为f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|^n+\left|\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|^n$$

$$=|\cos x|^n+|\sin x|^n=f(x),$$

所以$\frac{\pi}{2}$是$f(x)=\sin^n x+\cos^n x$的周期.

但是，当$x=0\in(-\infty+\infty)$时，有

$$f\left(0+\frac{\pi}{3}\right)=\left|\sin\frac{\pi}{3}\right|^n+\left|\cos\frac{\pi}{3}\right|^n\neq 1=f(0)$$

因而$\frac{\pi}{3}$不是$f(x)$的周期.

综上得知$f(x)=\sin x^n+\cos^n x$，当n为偶数时，其最小正周期为$\frac{\pi}{2}$.

（2）当n为奇数时，$\sin^n x$的最小正周期$T_1=2\pi$，$\cos^n x$的最小正周期$T_2=2\pi$，T_1与T_2的最小公倍数$T=2\pi$.

由于　$f(0+\pi)=\sin^n\pi+\cos^n\pi=-1\neq 1=f(0)$，所以$\pi$不是$f(x)$的周期．从而，当$n$为奇数时，函数$f(x)=\sin^n x+\cos^n x$的最小正周期是$2\pi$.

5．极值性

求函数的极大值、极小值是研究函数性质中的一个重要问题，也是中学数学的重要内容之一，在国内外的数学竞赛中亦常常出现有关试题．在现行中学数学教材中，有关求函

数极值的题目，常采用观察法、分析法、判别式法，极限法及微分法等。这里，再补充介绍几种方法。

一是利用直线斜率来求某些函数的极值。这是从参数方程的观点出发，借助形数结合，给出用直线斜率来求函数极值的方法。

例 1　求$u=\dfrac{3\sin\theta+1}{\sin\theta+2}$的最大值和最小值。

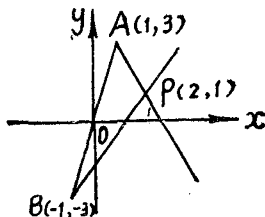
解：　因$u=\dfrac{1-(-3\sin\theta)}{2-(-\sin\theta)}$，可见$u$表示点$p(2,1)$，和点$(-\sin\theta,-3\sin\theta)$连线的斜率。设

$$\begin{cases} x=-\sin\theta \\ y=-3\sin\theta, \end{cases} \qquad |x|\leqslant 1.$$

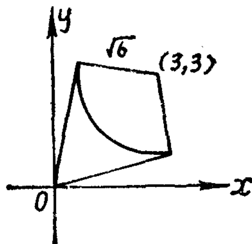
消去参数θ得　$y=3x$。

从而u表示连接点$p(2,1)$与线段$AB=\{(x,y)\,|\,y=3x,|x|\leqslant 1\}$上任一点的直线斜率，由图4-6直接看出

$$u_{\max}=\frac{1-(-3)}{2-(-1)}=\frac{4}{3},\quad u_{\min}=\frac{1-3}{2-1}=-2.$$



图(4-6)



(图4-7)

例 2 （第35届美国中学数学竞赛题）

对满足$(x-3)^2+(y-3)^2=6$的所有实数对(x, y)，求$\frac{y}{x}$的最值。

解：设$K=\frac{y}{x}=\frac{0-y}{0-x}$，则$K$表示联结原点$(0, 0)$与点$(x, y)$的直线斜率。而点$(x、y)$在圆$(x-3)^2+(y-3)^2=6$上，由图4-7不难得出

$$K_{max}=3+\sqrt{2}，K_{min}=3-\sqrt{2}.$$

二是利用直线截距求某些函数的极值。这种方法与其它方法一样，也有它的局限性。但与其它方法相比，却有明显的几何意义，且适应这一方法的函数可归纳为一函数类。

设$f(x)$是定义在$[a, b]$上的函数，且$f(x)$可分解为

$$f(x)=(Ax+B)+g(x).$$

则$f(x)$的最大、最小值可通过下列方法求得。

记 $f=(Ax+B)+g(x)$

则 $-Ax+(f-B)=g(x)$ (1)

设 $y=-Ax+(f-B)$ (2)

$y=g(x)$ (3)

显然(1)式的意义在于求直线(2)与曲线(3)的交点，$f-B$是直线(2)在y轴上的截距。现过曲线$y=g(x)(x\in[a,b])$上每一点$(x_0, g(x_0))$作斜率为$-A$的直线，得一簇平行直线系，与此相应的直线(2)在y轴上的截距为$Ax_0+g(x_0)$。再从这簇平行直线系中求出它们在y轴上的截距的最大者设为$Ax_1+g(x_1)$与最小者设为$Ax_2+g(x_2)$，则有

$$Ax_2+g(x_2)\leqslant f-B\leqslant Ax_1+g(x_1)$$

从而　$(Ax_2+B)+g(x_2)\leqslant f\leqslant(Ax_1+B)+g(x_1)$.

可见　$(Ax_1+B)+g(x_1)$ 与 $(Ax_2+B)+g(x_2)$分别是 $f(x)$的最大值或最小值.

特别当$g(x)$为单调函数时，则

$\max f(x)=\max\{Aa+B+g(a),\ Ab+B+g(b)\}$,

$\min f(x)=\min\{Aa+B+g(a),\ Ab+B+g(b)\}$.

例 3　83年全国竞赛题）

函数 $F(x)=|\cos^2x+2\sin x\cos x-\sin^2x+Ax+B|$ 在 $0\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}\pi$ 上的最大值M与参数A，B有关．问A、B取什么值时M为最小，并证明之.

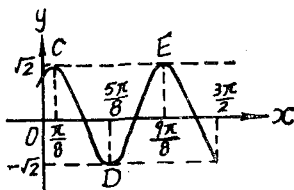
解：设$f=\cos^2x+2\sin x\cos x-\sin^2x+Ax+B$,

则　$-Ax+(f-B)=\cos^2x+2\sin x\cos x-\sin^2x$

即　$-Ax+(f-B)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

作出函数 $y=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{4}{\pi}\right)\left(x\in\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]\right)$的图象.

(图4-8)



图(4-8)

(1) 当$A=0$时，过曲线 $y=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\left(x\in\left[0,\frac{3}{2}\pi\right]\right)$上每一点作平行于$x$轴的一簇平行线，显然这簇平行线都位于直线$l_1$：$y=\sqrt{2}$与直线$l_2$：$y=-\sqrt{2}$之间，从而这

簇平行线的截距$f-B$满足

$$-\sqrt{2}\leqslant f-B\leqslant\sqrt{2},$$

即 $$B-\sqrt{2}\leqslant f\leqslant B+\sqrt{2}.$$

则$\max f=\sqrt{2}+B$, $\min f=-\sqrt{2}+B$.

若当$B=0$时, $M=|\max f|=|\min f|=\sqrt{2}$;

若当$B\neq 0$时, $M=\max\{|\max f|,|\min f|\}>\sqrt{2}$.

(2) 当$A\neq 0$时,过曲线$y=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\left(x\in\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]\right)$上$C$、$D$、$E$三点作斜率为$-A$的直线在$y$轴上的截距分别为:

$$f_C-B=\sqrt{2}+\frac{1}{8}\pi A,$$

$$f_D-B=-\sqrt{2}+\frac{5}{8}\pi A,$$

$$f_E-B=\sqrt{2}+\frac{9}{8}\pi A.$$

于是$f_C=\sqrt{2}+\frac{1}{8}\pi A+B$,

$$f_D=-\sqrt{2}+\frac{5}{8}\pi A+B,$$

$$f_E=\sqrt{2}+\frac{9}{8}\pi A+B.$$

由于$\frac{1}{8}\pi A+B$, $\frac{5}{8}\pi A+B$, $\frac{9}{8}\pi A+B$是三个不同时为零的数，且构成等差数列，因此，若$\frac{5}{8}\pi A+B=0$，则$\frac{1}{8}$

$\pi A+B$与$\frac{9}{8}\pi A+B$异号； 若$\frac{5}{8}\pi A+B\neq 0$，则$\frac{5}{8}\pi A+B$至少与$\frac{1}{8}\pi A+B$、$\frac{9}{8}\pi A+B$中之一同号．故$|f_C|$、$|f_D|$、$|f_E|$中必有其一的值大于$\sqrt{2}$，从而 $M=\max\{|f_C|, |f_D|, |f_E|\}>\sqrt{2}$．

综合(1)、(2)可知，当$A=B=0$时，M有最小值$\sqrt{2}$．

三是关于二元函数条件极值的一种求法．

二元函数条件极值的初等解法很多，一般都采用降维法来处理．但对约束条件和目标函数均为二次的极值问题，用降维法处理较为复杂．此问题可通过适当的代数恒等变换使目标函数转化为一次的条件极值来解决．

(1) 约束条件为二次，目标函数为一次的极值问题的求法．

例 4 若$x^2+y^2=r^2$ $(r>0)$，求$x+y$的最大值和最小值．

解： 设$x+y=k$，再由$x^2+y^2=r^2$ 得

$$2x^2-2kx+k^2-r^2=0.$$

因x为实数，则 $\triangle=(-2k)^2-8(k^2-r^2)\geqslant 0$．

解得 $$-\sqrt{2}r\leqslant k\leqslant\sqrt{2}r,$$

即 $$-\sqrt{2}r\leqslant x+y\leqslant\sqrt{2}r.$$

因此，$x+y$的最大值是$\sqrt{2}r$，最小值为$-\sqrt{2}r$．

(2) 约束条件和目标函数均为二次的极值问题的一种求法．

例 5 若$3x^2+2\sqrt{2}xy+2y^2=4$，求x^2+y^2的最大值和最小值．

解：因为 $3x^2+2\sqrt{2}xy+2y^2=4$，

则 $x^2+y^2=4-(2x^2+2\sqrt{2}xy+y^2)$

$$=4-(\sqrt{2}x+y)^2.$$

这样，求x^2+y^2的最值问题就变成在约束条件下求$\sqrt{2}x+y$的最值问题。

设 $\sqrt{2}x+y=k$，由方程组

$$\begin{cases}3x^2+2\sqrt{2}xy+2y^2=4\\ \sqrt{2}x+y=k\end{cases}$$

有实数解，可求得 $0\leqslant k^2\leqslant 3$。

因此，x^2+y^2的最大值为$4-0=4$；最小值为$4-3=1$。

二、试题类型和解题方法

例1 （63年上海市竞赛题）

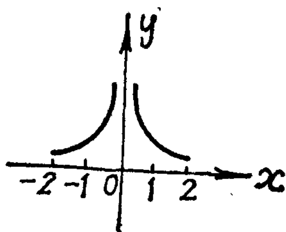
作（1）$y=\sqrt{\dfrac{1}{x^2}}$；（2）$y=|x(x-1)|$的函数图象。

解：

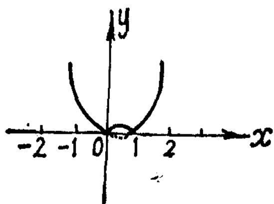
$$（1）\quad y=\sqrt{\frac{1}{x^2}}=\left|\frac{1}{x}\right|=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & (x>0)\\ -\dfrac{1}{x} & (x<0)\end{cases}$$

其图象如图4-9。

$$（2）\quad y=|x(x-1)|=\begin{cases}x^2-x & (x\geqslant 1)\\ -(x^2-x) & (0<x<1)\\ x^2-x & (x\leqslant 0)\end{cases}$$



（图4-9）



（图4-10）

当$y=x^2-x$时，其函数图象是经过$(0,0)$，$\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{4}\right)$，$(1,0)$等点的抛物线．在条件$x\geqslant1$和$x\leqslant0$的限制下，它是在$(0,\ 0)$与$(1,\ 0)$间的这条抛物线的一部分（图4-10）．

当$y=-(x^2-x)$时，其函数图象是经过$(0,0)$，$\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)$，$(1,\ 0)$等点的抛物线．在条件$0<x<1$的限制下，它是界于$(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$之间此抛物线的一段弧（图2-16）．

例 2 （79年贵州省竞赛题）

设有函数$y=\lg\sin x$；

（1）指出它的定义域和值域；

（2）画出它的略图

解：（1）因$-1\leqslant\sin x\leqslant1$，而负数和零无对数，故只有

$$0<\sin x\leqslant1 \qquad (1)$$

时，函数$y=\lg\sin x$才有意义．

但因满足①式的x值为

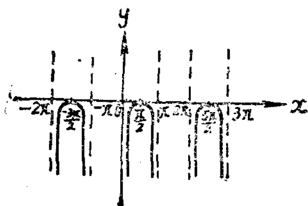
$$2n\pi<x<(2n+1)\pi \qquad (2)$$

其中，n为任意正的或负的整数和零.

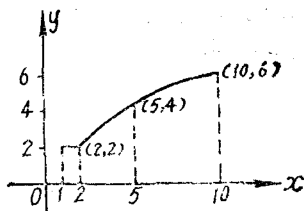
所以，由②知函数定义域 为$(2n\pi,\ (2n+1)\pi)(n\in z)$。

又由①知，这个函数的值域为$(-\infty,\ 0]$。

(2) 函数$y=\lg\sin x$的略图如图4-11



(图4-11)



(图4-12)

例 3 (78年重庆市竞赛题)

已知函数$y=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$.

(1) 求这个函数的定义域；

(2) 绘出这个函数的图象；

(3) 求这个函数的极值.

解：(1) 函数的定义域由下列条件决定：

$$\begin{cases}x-1\geqslant 0\\ x-2\sqrt{x+1}\geqslant 0.\end{cases}$$

解之，得$1\leqslant x<+\infty$，则知所求定义域为$[1,\ +\infty)$。

(2) 先将函数表达式变形：

由 $y^2=2x+2\sqrt{(x-2)^2}$

得 $y=\sqrt{2[x+\sqrt{(x-2)^2}]}=2\sqrt{\dfrac{x+|x-2|}{2}}$

$$=\begin{cases} 2 & (1\leqslant x<2) \\ 2\sqrt{x-1} & (x\geqslant 2) \end{cases}$$

由此绘得图形。如图4-12

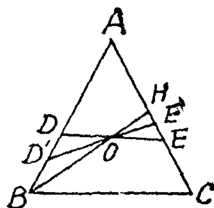
(3) 当$1\leqslant x<2$时，函数有定值$y=2$；

当$x\geqslant 2$时，显然有$y=2\sqrt{x-1}\geqslant 2$.

因此，当$1\leqslant x\leqslant 2$时，函数y处处有极小值2.

例 4 （79年天津市竞赛题）

已知$\triangle ABC$是边长为1的正三角形，O为其中心，试问：过O点且两端落在$\triangle ABC$边上的线段中，哪几条最长？哪儿条最短？它们各为多长？证明你的论断。



（图4-13）

解： 如图4-13.

过O点且与任一边（例如BC）平行，端点D、E分别在另两边（AB, AC）上的线段DE最短：任一边上的高（例如BH）最长.

事实上，设$OH=h$，$\angle E'OE=\theta$. 由于$\theta\leqslant\angle HOE$，$\angle HOE=\angle HBC=30°$，所以$0°<\theta\leqslant 30°$，则

$$OE'=\frac{h}{\sin(60°+\theta)},\quad OD'=\frac{h}{\sin(60°-\theta)}.$$

于是 $$D'E'=OD'+OE'=h\left[\frac{1}{\sin(60°+\theta)}+\frac{1}{\sin(60°-\theta)}\right],$$

而 $DE=\dfrac{2h}{\sin 60^\circ}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}h$，$BH=3h$。

欲证$DE\leqslant D'E'\leqslant BH$，只须证

$$\frac{4\sqrt{3}}{3}h\leqslant h\left[\frac{1}{\sin(60^\circ+\theta)}+\frac{1}{\sin(60^\circ-\theta)}\right]\leqslant 3h.$$

即 $$\frac{4\sqrt{3}}{3}\leqslant\frac{1}{\sin(60^\circ+\theta)}+\frac{1}{\sin(60^\circ-\theta)}\leqslant 3.$$

设 $$f(\theta)=\frac{1}{\sin(60^\circ+\theta)}+\frac{1}{\sin(60^\circ-\theta)}$$

$$=\frac{1}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\dfrac{1}{2}\sin\theta}+\frac{1}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\dfrac{1}{2}\sin\theta}$$

$$=\frac{\sqrt{3}\cos\theta}{\dfrac{3}{4}\cos^2\theta-\dfrac{1}{4}\sin^2\theta}$$

$$=\sqrt{3}\left(\frac{\cos\theta-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}}{\cos^2\theta-\dfrac{1}{4}}\right)$$

$$=\sqrt{3}\left(\frac{1}{\cos\theta+\dfrac{1}{2}}+\frac{\dfrac{1}{2}}{\cos^2\theta-\dfrac{1}{4}}\right).$$

角θ由$0^\circ\longrightarrow 30^\circ$时，$\cos\theta$为减函数，故$f(\theta)$为增函数，因此$f(0^\circ)<f(\theta)\leqslant f(30^\circ)$。

而 $f(0°)=\frac{2}{\sin 60°}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，

$$f(30°)=\frac{1}{\sin 90°}+\frac{1}{\sin 30°}=1+2=3.$$

则有 $\frac{4\sqrt{3}}{3}\leqslant f(\theta)\leqslant 3$。

例5 （84年全国竞赛题）

若$a>0$，$a\neq 1$，$F(x)$是一个奇函数，则$G(x)=F(x)\left[\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}\right]$是

（A） 奇函数；　　（B） 偶函数；

（C） 不是奇函数也不是偶函数；

（D） 奇偶性与a的具体数值有关。

解： 因为$G(x)=F(x)\cdot\frac{a^x+1}{2(a^x-1)}$，

所以 $G(-x)=F(-x)\cdot\frac{a^{-x}+1}{2(a^{-x}-1)}$

$$=[-F(x)]\cdot\frac{1+a^x}{2(1-a^x)}$$

$$=F(x)\cdot\frac{a^x+1}{2(a^x-1)}=G(x).$$

则知$G(x)$是偶函数，应选答案(B)。

例6 （78年福州市竞赛题）

已知函数$f(x)$的定义域是全体实数，并且对自变量x的任意值x_1，x_2，等式

$$f(x_1)+f(x_2)=2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\cdot f\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)$$

都成立；又知$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$，但$f(x)$不恒等于0。

求证，对一切x的值如下等式都成立：

(1) $f(x+2\pi)=f(x)$；

(2) $f(-x)=f(x)$；

(3) $f(2x)=2[f(x)]^2-1$。

证明：(1) 因为$f(x+\pi)+f(x)=2f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$，

所以 $f(x+\pi)=-f(x)$，

则 $f(x+2\pi)=f(x+\pi+\pi)=-f(x+\pi)=f(x)$。

即 $f(x+2\pi)=f(x)$。

(2) 因为 $f(x)+f(x)=2f\left(\frac{x+x}{2}\right)f\left(\frac{x-x}{2}\right)$

$$=2f(x)f)0) \quad ①$$

$$f(x)+f(-x)=2f\left(\frac{x-x}{2}\right)f\left(\frac{x+x}{2}\right)=2f(0)f(x) \quad ②$$

由①、②得 $f(x)+f(x)=f(x)+f(-x)$。

则 $f(x)=f(-x)$。

(3) 由①式得 $2f(x)[1-f(0)]=0$。

又因$f(x)$不恒等于0，所以 $f(0)=1$。

由于 $f(2x)+f(0)=2f\left(\frac{2x+0}{2}\right)f\left(\frac{2x-0}{2}\right)$

即　$f(2x)+1=2[f(x)]^2$,

故　$f(2x)=2[f(x)]^2-1$.

所以，对x的一切值，以上三式均成立.

例7　（79年山西省竞赛题）

已知函数$f(x)$为偶函数，求满足下述条件的一组x的值：

$$f(\sin^2x)=f(-2\sin x\cos x-3\cos^2x).$$

解：根据已给条件，或有

$$\sin^2x=-2\sin x\cos x-3\cos^2x,$$

即　$\sin^2x+2\sin x\cos x+3\cos^2x=0$.

因为　$\cos x\neq 0$，则上式化为

$$\operatorname{tg}^2x+2\operatorname{tg}x+3=0.$$

但此方程无实数解，因而此式不能用.

由于$f(x)$为偶函数，因此或有

$$\sin^2x=2\sin x\cos x+3\cos^2x,$$

即　$\sin^2x-2\sin x\cos x-3\cos^2x=0$.

因为　$\cos x\neq 0$，所以有

$$\operatorname{tg}^2x-2\operatorname{tg}x-3=0,$$

$$(\operatorname{tg}x+1)(\operatorname{tg}x-3)=0.$$

若　$\operatorname{tg}x=-1$，则　$x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$;

若　$\operatorname{tg}x=3$，则　$x=\operatorname{arctg}3+k\pi$.

综上可知，所求的某组x的值或为$x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$；或为$x=\operatorname{arctg}3+k\pi$　（k为整数）.

例8　（78年山西省竞赛题）

设函数$f(x)$的周期为k．若$a>0$，$F(x)=f(ax)$，那么

$F(x)$是否是周期函数？为什么？

解：由已知条件有

$$F(x)=f(ax)=f(ax+k)=f\left(a\left(x+\frac{k}{a}\right)\right)$$

$$=F\left(x+\frac{k}{a}\right).$$

所以，$F(x)$是周期函数.

例9 （60年上海市竞赛题）

对于函数$y=\lg(2\sin x)$，回答下列问题，然后作出它的图象.

（1）它的定义域是什么？

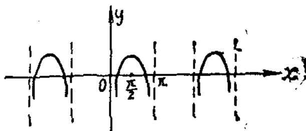
（2）x取何值时，函数值等于零？

（3）x取何值时，函数有极大值？极大值等于多少？

（4）这函数是否是周期函数？如果是的，求出它的最小正周期.

（5）当角变量x从0逐渐增加到π时，函数变化情况怎样？

（6）作出它的图象.



（图4-14）

解：$y=\lg(2\sin x)$

（1）显然，函数定义域为$(2k\pi,\ (2k+1)\pi)\quad(k\in Z)$.

（2）当 $2\sin x=1$，即 $\sin x=\frac{1}{2}$时，$y=0$.

即当　$x=k\pi+(-1)^k\frac{\pi}{6}$　$(k\in Z)$时，$y=0$。

(3) 当$x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$　$(k\in Z)$，函数有极大值：

$y_{max}=\lg 2$。

(4) 所给函数是周期函数。

因为　$\lg(2\sin(2\pi+x))=\lg(2\sin x)$，

所以，它的最小正周期是2π。

(5) 当自变量x从0逐渐增加到π时，函数y的变化情况是

x变化：$0\nearrow\frac{\pi}{6}\nearrow\frac{\pi}{2}\nearrow\frac{5\pi}{6}\nearrow\pi$

y变化：$-\infty\nearrow 0\nearrow\lg 2\searrow 0\searrow-\infty$

(6) 图象：如图4-14。

例10　（78年银川市竞赛题）

函数$y=3\sqrt{3}\cos x+\sin x$，x取什么值时，有极大值和极小值？极大值和极小值各是什么？

解：设　$3\sqrt{3}=r\cos\varphi$，$1=r\sin\varphi$，

则有　$\varphi=\operatorname{arctg}\frac{1}{3\sqrt{3}}$，　$r=\sqrt{28}$。

因为 $y=3\sqrt{3}\cos x+\sin x$

$=r(\cos\varphi\cos x+\sin\varphi\sin x)$

$=2\sqrt{7}\cos(x-\varphi)$

则当$x-\varphi=0$即$x=\varphi$时，y有极大值$2\sqrt{7}$；

当$x-\varphi=\pi$时，即$x=\pi+\varphi$时，y有极小值：$-2\sqrt{7}$。

例11 （78年辽宁省竞赛题）

求函数 $y=2-\dfrac{5}{\sqrt{x^2-2x+6}}$ 的最大值或最小值。

解： 就$\sqrt{x^2-2x+6}$而言，因$a=1>0$，$\sqrt{x^2-2x+6}$ 有最小值，$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x+6}}$有最大值，因此$y$有最小值。当$x=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{-2}{2\times1}=1$时，$\sqrt{x^2-2x+6}$有最小值$\sqrt{\dfrac{4ac-b^2}{4a}}=\sqrt{\dfrac{24-4}{4}}=\sqrt{5}$，因而$y$有最小值$2-\dfrac{5}{\sqrt{5}}=2-\sqrt{5}$。

例12 （78年福州市竞赛题）

已知$0<x<\pi$，当x为何值时，函数

$$y=\cos\left(2x+\frac{2\pi}{7}\right)-2\cos\left(x+\frac{\pi}{7}\right)$$有最大值和最小值.

并求出最大值和最小值。

解： $y=\cos\left(2x+\dfrac{2\pi}{7}\right)-2\cos\left(x+\dfrac{\pi}{7}\right)$

$$=2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{7}\right)-2\cos\left(x+\frac{\pi}{7}\right)-1$$

$$=2\left[\cos\left(x+\frac{\pi}{7}\right)-\frac{1}{2}\right]^2-\frac{3}{2},$$

已知 $0<x<\pi$，所以

当 $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{7}\right)=-1$时，$y_{最大}=3$，此时$x=\dfrac{6\pi}{7}$，

当 $\cos\left(x+\frac{\pi}{7}\right)=\frac{1}{2}$时，$y_{最小}=-\frac{3}{2}$，此时$x=\frac{4\pi}{21}$。

例13 （第一届美国数学邀请赛试题）

求 $f(x)=\frac{9x^2\sin^2x+4}{x\sin x}$ $(0<x<\pi)$ 的最小值.

解：将$f(x)$的表达式变形

$$f(x)=9x\sin x+\frac{4}{x\sin x}$$

把右端第一项记为u，第二项记作v，注意uv是常量. 这提示我们使用$\frac{u+v}{2}\geqslant\sqrt{uv}$. 其中$u$、$v$是非负数，而等号成立的充要条件是$u=v$，把这个等式用于这里的$u$、$v$，得到

$$\frac{f(x)}{2}\geqslant\sqrt{9\times4}, \text{ 就是 } f(x)\geqslant12.$$

12这个值确实能达到的充要条件是有这样的x使

$$9x\sin x=\frac{4}{x\sin x}, \text{ 即 } x^2\sin^2x=\frac{4}{9}.$$

因为$x^2\sin^2x$当$x=0$时为0；当 $x=\frac{\pi}{2}$时大于1，所以当x取0与$\frac{\pi}{2}$之间的某个值时$x^2\sin^2x$会等于$\frac{4}{9}$，因此，$f(x)$的最小值的确是12.

例14 （60年上海市竞赛题）

已知振动$y_1=\sin x$，$y_2=\sin^2x$，研究它们的合振动$y=y_1+y_2=\sin x+\sin^2x$的性质（x的取值范围，极大值和极小值，零点，变化情况，对称性，周期性），并作出它的图象.

解：（1）函数$y=\sin x+\sin^2 x$的定义域为$(-\infty, +\infty)$；

（2）当 $x=2n\pi+\frac{\pi}{2}(n\in 2)$时，$y$有最大值2；

当 $x=n\pi-(-1)^n\frac{\pi}{6}(n\in Z)$时，$y$有最小值$-\frac{1}{4}$。

（3）当$x=n\pi$或$x=2n\pi-\frac{\pi}{2}(n\in Z)$时，$y=0$。

（4）当 $2n\pi\leqslant x\leqslant 2n\pi+\frac{\pi}{2}$时，$y$递增（从0到1）；

当 $2n\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2n\pi+\frac{7\pi}{6}$时，$y$递减$\left(从1到-\frac{1}{4}\right)$；

当 $2n\pi+\frac{7\pi}{6}\leqslant x\leqslant 2n\pi+\frac{3\pi}{2}$时，$y$递增$\left(从-\frac{1}{4}到0\right)$；

当 $2n\pi+\frac{3}{2}\pi\leqslant x\leqslant 2n\pi+\frac{11\pi}{6}$时，

y递减（从0到$-\frac{1}{4}$）；

当 $2n\pi+\frac{11\pi}{6}\leqslant x\leqslant 2(n+1)\pi$时，$y$递增（从$-\frac{1}{4}$到0）。

注：以上n为整数，即$n\in Z$。

（5）函数图象（略），既不关于x轴和y轴对称，也不关于原点对称。

（6）$y=\sin x+\sin^2 x$是周期函数，其周期为2π。

例15（79年西安市竞赛题）

已知函数$f(x)=|x^2-1|+m|x+1|+a$有极小值，$f(2)=-4$，求函数$f(x)$的零点。

解：当$x>1$时，$f(x)=x^2+mx+(a+m-1)$，其极值点为$x_0=-\frac{m}{2}=2$，则$m=-4$。

又$f(2)=2^2-4\times2+(a-4-1)=-4$，得$a=5$.

$$故知\ f(x)=\begin{cases}x^2+4x+8 & (x\leqslant-1)\\ -x^2-4x+2 & (-1<x\leqslant1)\\ x^2-4x & (x>1)\end{cases}$$

(1) 当$x\leqslant-1$时，$\Delta=4^2-4\times8<0$，则$f(x)>0$，

因而，此时$f(x)$无零点；

(2) 当$-1<x\leqslant1$时，解方程$-x^2-4x+2=0$，得此区间内的一个零点$x_1=\sqrt{6}-2$；

(3) 当$x>1$时，解方程$x^2-4x=0$，得此区间内的一个零点$x_2=4$.

综上，$f(x)$的零点是$\sqrt{6}-2$和4.

例16 （第十五届国际数学竞赛题）.

设a、b都是实数，并且方程$x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$至少有一个实数解，试确定a^2+b^2的最小可能值.

解：设x_0是函数$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+ax+1$的一个实数根，即$f(x_0)=0$，显然$x_0\neq0$（因$f(0)=1\neq0$），从而$\frac{1}{x_0}$存在且$f(\frac{1}{x_0})=\frac{1}{x_0^4}f(x_0)=0$，因此$\frac{1}{x_0}$也是函数$f(x)$的一个实根．由此可设

$$f(x)=(x-x_0)(x-\frac{1}{x_0})(x^2+px+1)$$

$$=[x^2-(x_0+\frac{1}{x_0})x+1](x^2+px+1)$$

$$=x^4+[p-(x_0+\frac{1}{x_0})]x^3+[2-(x_0+\frac{1}{x_0})p]x^2$$

$$+[p-(x_0+\frac{1}{x_0})]x+1.$$

令 $q=x_0+\frac{1}{x_0}$，则

$f(x)=x^4+(p-q)x^3+(2-pq)x^2+(p-q)x+1$

其中p、q均为实数.

与原方程比较可得$a=p-q$，$b=2-pq$，

于是有$a^2+b^2=(p-q)^2+(2-pq)^2=(q^2+1)p^2-6qp+q^2+4$.

将上式右端看作关于p的二次函数，记为$F(p)$.即$F(p)=(q^2+1)p^2-6qp+q^2+4$。

于是，欲求a^2+b^2的最小可能值，转化为求$F(p)$的最小可能值。由于$q^2+1>0$，所以$F(p)$的最小值存在且当$p=\frac{6q}{2(q^2+1)}$时，$F(p)$的最小值为

$$\frac{4(q^2+1)(q^2+4)-36q^2}{4(q^2+1)}=\frac{(q^2-2)^2}{q^2+1}.$$

再由 $q^2=(x_0+\frac{1}{x_0})^2=(x_0-\frac{1}{x_0})^2+4\geqslant 4$。

即得 $a^2+b^2=F(p)\geqslant\frac{(q^2-2)^2}{q^2+1}=\left(1-\frac{3}{q^2+1}\right)(q^2-2)$

$$\geqslant\left(1-\frac{3}{5}\right)(4-2)=\frac{4}{5}.$$

故知a^2+b^2的最小可能值是$\frac{4}{5}$，此时$q=\pm2$，$p=\pm\frac{6}{5}$，

从而易知$a=\pm\frac{4}{5}$，　$b=-\frac{2}{5}$.

第　五　讲

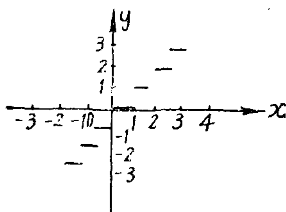
高斯函数与函数方程

一、高斯函数

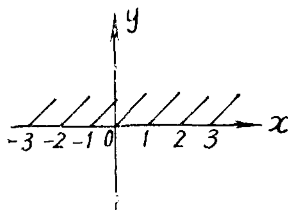
函数$f(x)=[x]$叫做高斯函数，定义域为实数集；对应法则可用一句话概括，即$f(x)$是不超过x的最大整数.这里符号$[x]$只不过是高斯函数的函数值的记号，高斯函数$f(x)=[x]$是一种记号表示法，其对应法则是用一句话表达的，不能用一个式子表达，但可用图象表达，如图5-1.

由于高斯函数图象呈阶梯状，所以它也称为阶梯函数.要掌握它，应抓住两点：其一，对任何x，$[x]$是整数；其二，$[x]\leqslant x<[x]+1$，这说明$[x]$是x的整数部分，因此，高斯函数又叫取整函数.

设$\{x\}=x-[x]$，则称$\{x\}$为x的分数部分.于是，$0\leqslant\{x\}<1$.显然，$x=[x]+\{x\}$.



(图5-1)



(图5-2)

函数$y=\{x\}$称为分数函数，其图象如图5-2

近年来，高斯函数$f(x)=[x]$经常出现在国内外中学数学竞赛题之中。虽然解答有关这类试题不要很多基础知识，但有很强的技巧性。因此，我们若能熟悉高斯函数的定义、性质及其应用中的有关技巧，那么对参加数学竞赛是大有好处的。

高斯函数$f(x)=[x]$有如下基本性质：

性质1. $f(x)=[x]$是不减函数．即，当$x_1\leqslant x_2$时，必有$[x_1]\leqslant[x_2]$.

证明：由定义知$[x_1]\leqslant x_1$，而$x_1\leqslant x_2$，所以$[x_1]\leqslant x_2$．这说明$[x_1]$是不超过x_2的整数．再由定义知$[x_2]$是不超过x_2的最大整数，故有$[x_1]\leqslant[x_2]$.

注：性质1从图象也很容易看出．

性质2. $[x]$中的x的整数部分可以"往外拿"，即$[x+m]=[x]+m$，当且仅当m为整数时成立．

证明：当m是整数时，$[x+m]=\Big[[x]+\{x\}+m\Big]=\Big[([x]+m)+\{x\}\Big]=[x]+m$．等式成立．

当m不是整数时，则$\{m\}\neq0$，于是，$[x]+m=[x]+[m]+\{m\}\neq[x+m]$，等式不成立．

性质3. 对任意实数x_1和x_2，有$[x_1]+[x_2]\leqslant[x_1+x_2]$.

证明：因为$[x_1]\leqslant x_1$，$[x_2]\leqslant x_2$，所以$[x_1]+[x_2]\leqslant x_1+x_2$，于是$\Big[[x_1]+[x_2]\Big]\leqslant[x_1+x_2]$，即有

$$[x_1]+[x_2]\leqslant[x_1+x_2].$$

性质4. 若$x_1\geqslant0$，$x_2\geqslant0$，则$[x_1][x_2]\leqslant[x_1x_2]$.

证明：因为$0\leqslant[x_1]\leqslant x_1$，$0\leqslant[x_2]\leqslant x_2$，所以，$[x_1][x_2]\leqslant x_1x_2$。再根据性质1便有$\left[[x_1][x_2]\right]\leqslant[x_1x_2]$，即有$[x_1][x_2]\leqslant[x_1x_2]$。

性质5．设m与n均为正整数．在1，2，…，n中，m的倍数有$\left[\frac{n}{m}\right]$个．

证明：设有k个m的倍数，则m、$2m$、$3m$，…，km均不超过n，但$(k+1)m$超过n．即有$km\leqslant n<(k+1)m$，于是$k\leqslant\frac{n}{m}<k+1$，从而$\left[\frac{n}{m}\right]=k$．故此，在1，2，3，…，$n$中含$m$的倍数有$\left[\frac{n}{m}\right]$个．

性质6．如果n是自然数，则$\left[\frac{[x]}{n}\right]=\left[\frac{x}{n}\right]$．

证明：设$\left[\frac{[x]}{n}\right]=m$，则$m\leqslant\frac{[x]}{n}<m+1$，即有$mn\leqslant[x]<n(m+1)$．因为$nm$和$n(m+1)$都是整数，数$x$也应满足不等式$mn\leqslant x<n(m+1)$，由此得出：$m\leqslant\frac{x}{n}<m+1$，于是$\left[\frac{x}{n}\right]=m$。

综上可知$\left[\frac{[x]}{n}\right]=\left[\frac{x}{n}\right]$．

讲究解题技巧，这里更为重要．

由于高斯函数$f(x)=[x]$的性质不如常见的指数函数、对

数函数、三角函数等初等函数那样多，使用起来也不大方便，并且关于含符号$[x]$的题目，其它数学工具又往往用不上。因此，当我们熟悉了高斯函数的定义及其性质以后，应当进一步了解和掌握解答含$[x]$的题目的特殊技巧。这里，归纳为三点：

第一，充分利用$[x]$的定义。根据定义，对任意实数x都有$x=[x]+\{x\}$，而$0\leqslant\{x\}<1$。于是，将关于任意实数x的问题，归结为讨论区间$[0,1)$上的关于$\{x\}$的问题。

第二，有意识地利用$[x]$的性质，特别是前三个性质。因为这三个性质是直接由定义派生出来的，可以说是函数$[x]$的本质属性的推论。又因关于含$[x]$的问题，别的数学工具又用不上，所以能用上高斯函数的性质1，2，3，常能收到出奇制胜的效果。

第三，充分利用典型区间。假设$[x]=m$，$\{x\}=p$，则$x=m+p$，其中$0\leqslant p<1$。于是，问题归结为$[0,1)$上讨论。为此，需要对区间$[0,1)$进行划分，分段讨论。又常分成n个相等的小段：$\left[\frac{k-1}{n},\ \frac{k}{n}\right)$，$k=1,2,\cdots,n$。于是，问题的讨论只要在典型区间$\left[\frac{k-1}{n},\ \frac{k}{n}\right)$上进行即可。

例1 对任意实数x，y，求证：

$$[x]+[x+y]+[y]\leqslant[2x]+[2y].$$

证明：根据定义，$x=[x]+\{x\}$.，$y=[y]+\{y\}$

于是，$[2x]=[2[x]+2\{x\}]$，

$[2y]=[2[y]+2\{y\}]$，

$[x+y]=[([x]+[y])+(\{x\}+\{y\})]$.

根据性质2, $[2x]=2[x]+[2\{x\}]$,

$$[2y]=2[y]+[2\{y\}],$$

$$[x+y]=[x]+[y]+[\{x\}+\{y\}]$$

代入欲证不等式，抵消两边相同的部分，我们只须证明 $[\{x\}+\{y\}]\leqslant[2\{x\}]+[2\{y\}]$.

根据$\{x\}$、$\{y\}$的对称性，不妨设$\{x\}\leqslant\{y\}$，则

$$[\{y\}+\{y\}]=[2\{y\}]\leqslant[2\{y\}]+[2\{x\}].$$

根据性质 1 又有$[\{x\}+\{y\}]\leqslant[\{y\}+\{y\}]$,

于是有 $[\{x\}+\{y\}]\leqslant[2\{x\}]+[2\{y\}]$. 从而命题获证.

注：本例证明过程中，主要应用了高斯函数的定义及其性质1、2. 即运用了技巧中的第一和第二.

例2 对自然数n及一切实数x，求证：

$$[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\cdots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]$$

$$=[nx].$$

证明：设$x=m+p$. 其中$m=[x]$, $p=\{x\}$. 则原等式变为

$$[m+p]+[m+p+\frac{1}{n}]+[m+p+\frac{2}{n}]+\cdots+$$

$$\left[m+p+\frac{n-1}{n}\right]=[n(m+p)]$$

即 $nm+[p]+\left[p+\frac{1}{n}\right]+\left[p+\frac{2}{n}\right]+\cdots+$

$$\left[p+\frac{n-1}{n}\right]=mn+[np],$$

亦即 $$[p]+\left[p+\frac{1}{n}\right]+\left[p+\frac{2}{n}\right]+\cdots+$$

$$\left[p+\frac{n-1}{n}\right]=[np].$$

注意到这个等式的结构与原等式完全一样，并且$0\leqslant p<1$．因此，欲证原等式对一切实数x成立，只须证明原等式对区间$[0,1)$上的x成立．

再将区间$[0,1)$细分成n个长度为$\frac{1}{n}$的小区间$\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right)$（$k=1,2,\cdots,n$）．因为$x\in[0,1)$，所以必存在一个$k$使$\frac{k-1}{n}\leqslant x<\frac{k}{n}$，即$k-1\leqslant nx<k$，于是$[nx]=k-1$．

另一方面，由$\frac{k-1}{n}\leqslant x<\frac{k}{n}$知

$$\frac{k}{n}\leqslant x+\frac{1}{n}<\frac{k+1}{x},$$

$$\frac{k+1}{n}\leqslant x+\frac{2}{n}<\frac{k+2}{n},$$

$$\cdots\cdots,$$

$$\frac{k-i}{n}\leqslant x+\frac{i+1}{n}<\frac{k+i+1}{n},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\frac{k+n-2}{n}\leqslant x+\frac{n-1}{n}<\frac{k+n-1}{n}<\frac{2n-1}{n}<2.$$

仅当$\frac{k+i}{n}\geqslant 1$时，才有$\left[x+\frac{i+1}{n}\right]=1$.即要$k+i\geqslant n$,亦即$i\geqslant n-k$（$i=-1,0,1,2,\cdots,n-2$）.这就是说上述不等式,从其中$i=n-k$始至$i=n-2$,有$\left[x+\frac{i+1}{n}\right]=1$.这里,共有$(n-2)-(n-k)+1=k-1$个.至于前面的$n-k+1$个不等式中，$\left[x+\frac{i+1}{n}\right]=0$。于是，$[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\cdots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=k-1$。

故此，原等式成立。

注：本例主要利用了"典型区间"的技巧,即第三个技巧。在应用中，这里介绍六个方面：

(一)含$[x]$的运算

例1 若$A=\{[\sin a]\}$，$B=\{[\operatorname{tg} a]\}$。

求 $A\cup B$，$A\cap B$.

解：因为$A=\{-1,0,1\}$，$B=\{整数\}$，

所以 $A\cup B=B$，$A\cap B=A$。

例2 已知$[x]=-2$，$[y]=-3$，求$x-y$的值域。

解：因为$-2\leqslant x<-1$，$-3\leqslant y<-2$，

所以 $0\leqslant x-y<2$.

例3 若n为自然数,求$\sum_{n=1}^{100}\left[\frac{n+2}{n}\right]$的值。

解：因为$\sum_{n=1}^{100}\left[\frac{n+2}{n}\right]=\left[1+\frac{2}{1}\right]+\left[1+\frac{2}{2}\right]+\left[1+\frac{2}{3}\right]+\cdots+\left[1+\frac{2}{100}\right]$。

所以 $\sum_{n=1}^{100}\left[\frac{n+2}{n}\right]=(1+2)+(1+1)+(1+0)+\cdots+$

$(1+0)=103$.

（二）、含$[x]$的函数

例 4　求函数$f(x)=[-x^2+3x+1]$的最值。

解：令$y=-x^2+3x+1$，则$y=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{13}{4}$. 于是

$y\leqslant\frac{13}{4}$. 因而$f(x)$的最大值为$\left[\frac{13}{4}\right]=3$.

（三）含$[x]$的方程

解含$[x]$的方程，通常归结为解不等式或者解不等式组。

例 5　解方程$\left[\frac{5+6x}{8}\right]=\frac{15x+7}{5}$.

解：设$\frac{15x-7}{5}=m$，则$x=\frac{15m-7}{15}$，原方程变形为

$\left[\frac{10m+39}{40}\right]=m$. 于是$0\leqslant\frac{10m+39}{40}-m<1$.

解上面不等式，得$-\frac{1}{30}<m\leqslant\frac{13}{10}$. 因而有$m_1=0, m_2=1$.

当$m_1=0$时，得$x_1=\frac{7}{15}$;

当$m_2=1$时，得$x_2=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}$.

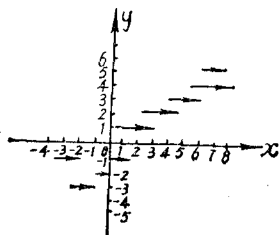
例 6　解方程$[x-1]=\left[\frac{x+2}{2}\right]$.

解：作函数$y=[x-1]$与$y=\left[\frac{x+2}{2}\right]$的图象(图5-3)

我们容易看到：当$3\leqslant x<5$时二函数的图象重合，因而方程的解为$3\leqslant x\leqslant 5$.

例 7　解方程$x^3-[x]=3$.

解：先将方程变形为$x^3-3=[x]$，再作函数$y=x^3-3$和



（图5—3）

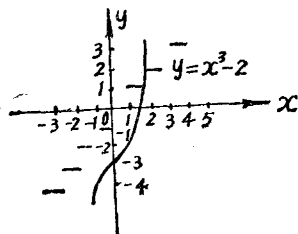


图5-4

$y=[x]$的图象(图5-4)。由于这两个函数的图象相交于唯一的点，所以原方程也具有唯一的根，这个根包含在数 1 与x之间．但如果$1<x<2$，则$[x]=1$，方程具有形式$x^3-1=3$．由此，$x=\sqrt[3]{4}$是已知方程的根．

例 8　求证下列方程无实数解

$$[x]+[2x]+[4x]+[8x]+[16x]+[32x]=12345.$$

证明：设$f(x)=[x]+[2x]+[4x]+[8x]+[16x]+[32x]$.

由性质 3 有$f(x)\leqslant[x+2x+4x+8x+16x+32x]$

$$=[63x]\leqslant 63x.$$

因此，如果方程有解，即存在x'使$f(x')=12345$，那么

$12345 \leqslant 63x'$，于是$x' \geqslant 12345 \div 63 = 195.9523\cdots$。

又因为$f(196) = [196] + [2 \times 196] + [4 \times 196] + [8 \times 196] + [16 \times 196] + [32 \times 196] = 63 \times 196 = 12345 > f(x')$。

根据性质1，由$f(196) > f(x')$知$196 > x'$。可见$195 < x' < 196$.

由此可令$x' = 195 + y$，$0 < y < 1$。代入原方程

$f(x') = f(195 + y) = [195 + y] + [2(195 + y)] + \cdots + [32(195 + y)]$.

根据性质2有

$$f(x') = 195 \times 63 + [y] + [2y] + [4y] + \cdots + [32y]$$
$$= 12285 + f(y) = 12345.$$

于是$f(y) = 60$，显然不成立。

因此，原方程无实数解。

（四）含$[x]$的不等式

例9 若$x \geqslant 0$，$y \geqslant 0$，求证：$[x + y] \leqslant [2x] + [2y]$。

证明：(1)若$0 \leqslant x + y < 1$，$0 \leqslant x < 1$，$0 \leqslant y < 1$，则有$[x + y] = 0$，$[2x] \geqslant 0$，$[2y] \geqslant 0$。因而有

$$[x + y] \leqslant [2x] + [2y].$$

(2)若$x + y \geqslant 1$，则$x + y - 1 \geqslant 0$。设$2x = m + p$，是数p的倍数的数有$\left[\frac{n}{p}\right]$个，因此$n!$中含p的因子有$\left[\frac{n}{p}\right]$个，这些p因子的积为$p^{\left[\frac{n}{p}\right]}$.

(2)同理，$n!$中含p^2的因子有$\left[\frac{n}{p^2}\right]$个，但$p^2$的倍数的数也是$p$的倍数，即$n!$中有$\left[\frac{n}{p^2}\right]$个$p^2$，也就有$\left[\frac{n}{p^2}\right]$个$p$，这些$p$

因子的积为$p^{\left[\frac{n}{p^2}\right]}$。

(3)同理，$n!$中有$\left[\frac{n}{p^3}\right]$个$p^3$，也就有$\left[\frac{n}{p^3}\right]$个$p$，这些$p$因子的积为$p^{\left[\frac{n}{p^3}\right]}$。

…………

因为$n!$中含p的因子的最高次幂，就是$n!$中所有p的因子的积，即

$$p^m=p^{\left[\frac{n}{p}\right]}\cdot p^{\left[\frac{n}{p^2}\right]}\cdot p^{\left[\frac{n}{p^3}\right]}\cdots\cdots$$

则 $$m=\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^k}\right].$$

因此命题为真。

注：(1)当$p^k>n$时，有$0<\frac{n}{p^k}<1$.因而$\left[\frac{n}{p^k}\right]=0$

(2)例10是一个很有用的命题，借助它，$2y=n+q$，m、n为整数，$0\leqslant p<1, 0\leqslant q<1$.

则 $[2x]+[2y]=m+n$,

$[2x+2y-1]=m+n+[p+q-1]$.

而$0\leqslant p+q<2$，则$-1\leqslant p+q-1<1$。于是，

$[p+q-1]=0$，或$[p+q-1]=-1$。

因此，$[2x]+[2y]=m+n\geqslant[2x+2y-1]$

$=[(x+y)+(x+y-1)]$…………①

由性质3，$[x+y]+[x+y-1]\leqslant[(x+y)+(x+y-1)]$

则 $[x+y]\leqslant[(x+y)+(x+y-1)]$……………②

综合①与②有 $[x+y]\leqslant[2x]+[2y]$.

（五）在数论中的应用

例10 若p是某个质数，n是自然数，$p\leqslant n$，且p^m是$n!$中含p的因子的p的最高次幂.求证：

$$m=\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^k}\right].$$

证明：（1）由性质5知，在1到n中是自然数p的倍数的数有$\left[\frac{n}{p}\right]$个，因而$n!$中含p的因子有$\left[\frac{n}{p}\right]$个，这些p因子的积为$p^{\left[\frac{n}{p}\right]}$；

（2）同理，$n!$中含p^2的因子有$\left[\frac{n}{p^2}\right]$个，但$p^2$的倍数的数也是$p$的倍数，即$n!$中有$\left[\frac{n}{p^2}\right]$个$p^2$，也就有$\left[\frac{n}{p^2}\right]$个$p$，这些$p$因子的积为$p^{\left[\frac{n}{p^2}\right]}$；

（3）同理，$n!$中有$\left[\frac{n}{p^3}\right]$个$p^3$，也就有$\left[\frac{n}{p^3}\right]$个$p$，这些$p$因子的积为$p^{\left[\frac{n}{p^3}\right]}$；

……

因为$n!$中含p的因子的最高次幂，就是$p!$中所有p的因子的积，即

$$p^m=p^{\left[\frac{n}{p}\right]}\cdot p^{\left[\frac{n}{p^2}\right]}\cdot p^{\left[\frac{n}{p^3}\right]}\cdots,$$

所以 $m=\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^k}\right].$

因此，命题正确.

注意：$p^k>n$时，，$0<\frac{n}{p^k}<1,\left[\frac{n}{p^k}\right]=0$.

例11　试计算6！中2的最高幂次数是多少？

解：根据例10，6！中2的最高幂次数是：

$$\left[\frac{6}{2}\right]+\left[\frac{6}{2^2}\right]+\left[\frac{6}{2^3}\right]+\left[\frac{6}{2^4}\right]+\cdots$$

$$=3+1+0+0+\cdots=4.$$

注：事实上，$6!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6=2^4\cdot3^2\cdot5$. 显然与上述结论相合。

例12　在数1000！中，以多少个零为结尾？

解：要知结果是多少个零，只须看数1000！中含10的幂的幂次数是多少．由于10是合数，不能直接用例10的结果．但$10=2\times5$. 且2与5均为素数．又由于对于2与5的同次幂（设幂次数为k），有

$$\left[\frac{1000}{2^k}\right]\geqslant\left[\frac{1000}{5^k}\right](k=1,2,3,\cdots).$$

由例10知，在数1000！中2的最高方次数大于或等于5的最高方次数．这说明，5的方次数就是10的方次数，也就是数1000！的末尾含零的个数，即

$$\left[\frac{1000}{5}\right]+\left[\frac{1000}{5^2}\right]+\left[\frac{1000}{5^3}\right]+\left[\frac{1000}{5^4}\right]+\left[\frac{1000}{5^5}\right]+\cdots$$

$$=200+40+8+1+0+\cdots=249.$$

例13　数1976！最后有多少个零？

解：如同例12的分析，只须求得1976！中5的方次数即

可。因而，数1976！最后是零的个数为

$$\left[\frac{1976}{5}\right]+\left[\frac{1976}{5^2}\right]+\left[\frac{1976}{5^3}\right]+\left[\frac{1976}{5^4}\right]+\left[\frac{1976}{5^5}\right]+\cdots$$

$$=295+79+15+3+0+\cdots=492.$$

例14 证明：数C_{1976}^{976}被76^2整除

解：因为$76=2^2\times 19$，则为了被76^2整除，必要且充分条件是：使C_{1976}^{976}被2^4和19^2整除。

因为 $C_{1976}^{976}=\dfrac{1976!}{976!1000!}$。于是我们求数1976！，976！和1000！的质因数分解式中，包含数 2 和 19的幂指数m_1，m_2，m_3和n_1，n_2，n_3各等于多少。

由例10知：

$$m_1=\left[\frac{1976}{2}\right]+\left[\frac{1976}{2^2}\right]+\left[\frac{1976}{2^3}\right]+\cdots+\left[\frac{1976}{2^{10}}\right]=1969,$$

$$m_2=\left[\frac{976}{2}\right]+\left[\frac{976}{2^2}\right]+\left[\frac{976}{2^3}\right]+\cdots+\left[\frac{976}{2^9}\right]=971,$$

$$m_3=\left[\frac{1000}{2}\right]+\left[\frac{1000}{2^2}\right]+\left[\frac{1000}{2^3}\right]+\cdots+\left[\frac{1000}{2^9}\right]=994,$$

且$m_1-m_2-m_3=4$，则C_{1976}^{976}被2^4整除。

类似地，

$$n_1=\left[\frac{1976}{19}\right]+\left[\frac{1976}{19^2}\right]=109,$$

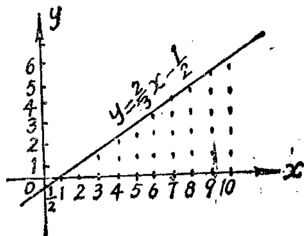
$$n_2=\left[\frac{976}{19}\right]+\left[\frac{976}{19^2}\right]=53,$$

$$n_3=\left[\frac{1000}{19}\right]+\left[\frac{1000}{19^2}\right]=54,$$

且$n_1-n_2-n_3=2$，则C_{1976}^{976}被19^2整除。

综上可知命题为真。

(六)关于整点问题



(图5-5)

所谓整点，就是指坐标平面上具有整数坐标 x和y 的点(x, y)。怎样计算在已知平面图形内部的整点个数？试以下例说明。

例15位于直线 $y=\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}$，$x=10$ 和横坐标轴形成的三角形内部与边上的整点有多少个？(图5-5)

解，我们求函数 $y=\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}$当整数$x=1, 2, \cdots, 10$时的值(注意当$x=\frac{3}{4}$时$y=0$)，得到纵坐标为 $\frac{1}{6}$，$\frac{5}{6}$，$\frac{3}{2}$，$\frac{13}{6}$，$\frac{17}{6}$，$\frac{7}{2}$，$\frac{25}{6}$，$\frac{29}{6}$，$\frac{11}{2}$和$\frac{37}{6}$。容易想象，位于已知三角形(考虑到边界)中整点总数等于纵坐标整数部分之和加上位于横坐标轴上的十个点：

$$\left[\frac{1}{6}\right]+\left[\frac{5}{6}\right]+\left[\frac{3}{2}\right]+\left[\frac{13}{6}\right]+\left[\frac{17}{6}\right]+\left[\frac{7}{2}\right]+\left[\frac{25}{6}\right]+\left[\frac{29}{7}\right]$$

$$+\left[\frac{11}{2}\right]+\left[\frac{37}{6}\right]+10=1+2+2+3+4+4+5+6+10=37.$$

答：所求整点数为37。

注：所给三角形内部总共只有$37-10-6=21$个整点。

二、函数方程

所谓函数方程，就是含有未知函数的等式。

例如：(1) $f(1-x)=f(x)$，(2) $f(-x)=-f(x)$，(3) $f(x+2\pi)=f(x)$等，都是函数方程。

函数方程这一概念我们并不陌生，它是易于理解的。

例 1 求凸n边形的对角线的条数。

这里，我们借助函数来分析：

设凸n边形的对角线的条数为$f(n)$，$n+1$边形的对角线条数为$f(n+1)$。

易知，$f(n+1)=f(n)+1+(n-2)=f(n)+n-1$。

显然，$f(n+1)=f(n)+n-1$就是一个函数方程。

例 2 n个学生排成一队，共有多少种排法？

设n个同学排成一队的方法数为$f(n)$，$n+1$个同学排成一队的方法数为$f(n+1)$。我们进一步考察$f(n+1)$与$f(n)$有何关系。$n+1$个同学的全部排列方法可从原来n个同学的每一种排列中这样得到：让新同学插入队伍，对原来n个同学的每一种排法，这位新同学可排在第一位，第二位，…，第$n+1$位，即有$n+1$种插法。由此得出：

$$f(n+1)=(n+1)f(n).$$

显然，$f(n+1)=(n+1)f(n)$是一个函数方程。

能使函数方程左右两边恒等的函数（在某一定义域内），叫做函数方程的解。

一如，$f(n)=\dfrac{n(n-3)}{2}$就是例 1 中方程的解；二如，

$f(n)=n!$就是例2中的方程的解。

寻求函数方程的解，或者证明函数方程无解的过程叫做解函数方程。

值得注意的是，解函数方程所得的解是一个或若干个函数，它与解普通方程所得的解是一个或者若干个数相类似。

函数方程在国际中学生数学奥林匹克竞赛试题中多有所见，因此，我们应当掌握解函数方程的基本方法。

（一）换元法

这一方法的要点是，先对函数方程中的变量进行适当换元，以形成一个关于未知函数的代数方程组，再用通常的消元法解此代数方程组，得出原函数方程解的必要形式。

例3　解函数方程

$$2f(x)+3f\left(\frac{1}{x}\right)=4x \tag{1}$$

解：(1) 式中有$x\neq0$，可设$y=\frac{1}{x}$，则$x=\frac{1}{y}$。于是方程(1) 变形为

$$2f\left(\frac{1}{y}\right)+3f(y)=\frac{4}{y} \tag{2}$$

由于函数中的自变量用什么字母来表示对函数没有影响，因而方程(2) 又可变形为

$$2f\left(\frac{1}{x}\right)+3f(x)=\frac{4}{x} \tag{3}$$

联立方程(1) 与(3)，不难解得

$$f(x)=\frac{12-8x^2}{5x}.$$

注：验证$f(x)=\dfrac{12-8x^2}{5x}$是方程(1) 的解。

事实上，$2\cdot\dfrac{12-8x^2}{5x}+3\cdot\dfrac{12-8\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}{5\cdot\dfrac{1}{x}}=\dfrac{24-16x^2}{5x}+$

$$\frac{36x^2-24}{5x}=\frac{20x^2}{5x}=4x.$$

例 4 解函数方程

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cos y \tag{1}$$

解 在(1)中设$x=0$，$y=t$，则有

$$f(t)+f(-t)=2f(0)\cos t \tag{2}$$

又设 $x=\dfrac{\pi}{2}+t$，$y=\dfrac{\pi}{2}$，则有

$$f(\pi+t)+f(t)=0$$

再设 $x=\dfrac{\pi}{2}$，$y=\dfrac{\pi}{2}+t$，则有 (3)

$$f(\pi+t)+f(-t)=-2f\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin t \tag{4}$$

由(2)+(3)-(4)得

$$2f(t)=2f(0)\cos t+2f\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin t,$$

即 $f(t)=f(0)\cos t+f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\sin t.$

若令 $a=f(0)$，$b=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$，$t=x$，则有

$$f(x)=a\cos x+b\sin x \quad (a、b\text{是常数}).$$

注：验证$f(x)=a\cos x+b\sin x$是方程(1)的解。

事实上，$f(x+y)+f(x-y)$

$$
\begin{aligned}
&=a\cos(x+y)+b\sin(x+y)+a\cos(x-y)\\
&\qquad +b\sin(x-y)\\
&=2a\cos x\cos y+2b\cos y\sin x\\
&=2\cos y(a\cos x+b\sin x)\\
&=2f(x)\cos y.
\end{aligned}
$$

(二)递推法

这一方法的要点是，利用递推关系，求出函数方程解的表达式。

例 5　设函数$f(n)$定义在自然数集上，且$f(1)=f(2)=f(3)=0$，试解函数方程

$$f(n+1)=f(n)+n-1.$$

解：已知$f(1)=f(2)=f(3)=0$，于是，我们将n依次用3，4，5，…，$(k-2)$，$(k-1)$代换，得

$$
\begin{aligned}
&f(4)=f(3)+2\\
&f(5)=f(4)+3\\
&f(6)=f(5)+4\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&f(k-1)=f(k-2)+(k-3)\\
&f(k)=f(k-1)+(k-2).
\end{aligned}
$$

上列各式相加并化简，得

$$
\begin{aligned}
f(k)&=f(3)+2+3+4+\cdots+(k-2)\\
&=2+3+4+\cdots+(k-2)\\
&=\frac{(2+k-2)(k-3)}{2}=\frac{k(k-3)}{2}.
\end{aligned}
$$

将k换成n，有 $$f(n)=\frac{n(n-3)}{2}.$$

验证：$$f(n+1)=\frac{(n+1)(n-2)}{2}=\frac{n^2-n-2}{2}$$

$$=\frac{n^2-3n+2n-2}{2}=\frac{n(n-3)}{2}+n-1$$

$$=f(n)+n-1。$$

注：本例所解的函数方程，就是由例1所得的函数方程。

例6 设$f(n)$定义在自然数集上，且$f(1)=1$。试解函数方程

$$f(n+1)=(n+1)f(n)$$

注：上列方程就是由例2所得的函数方程。

解：设$n=1, 2, 3, 4, \cdots, k-1$，则有

$f(2)=2f(1)$

$f(3)=3f(2)$

$f(4)=4f(3)$

$\cdots\cdots\cdots$

$f(k)=kf(k-1)$。

上列各式相乘并化简，得

$$f(k)=2\cdot3\cdot4\cdots k\cdot f(1)$$
$$=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdots k=k!$$

将k换成n，有$f(n)=n!$

验证：$f(n+1)=(n+1)!=(n+1)n!=(n+1)f(n)$。

例 7 解函数方程

$$f(n+1)=f(n)+n+1 \qquad (n\in N)$$

解： 仿照例 5 易得

$$f(n)=\frac{1}{2}n(n+1)+f(1)-1.$$

验证： $f(n+1)=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)+f(1)-1$

$$=\frac{1}{2}(n^2+3n+2)+f(1)-1$$

$$=\frac{1}{2}(n^2+n+2n+2)+f(1)-1$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)+(n+1)+f(1)-1$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)+f(1)-1+n+1$$

$$=f(n)+n+1.$$

例 8 平面上有n条直线，其中任何三条直线不交于同一点，已知这n条直线把平面分成不超过$\frac{1}{2}n(n+1)$个部分。试证：这n条直线中至少有两条直线平行。

证明：（反证法）

假若n条直线l_1，l_2，…，l_n中任何两条直线都相交，并且这n条直线把平面分成$f(n)$个部分。如果再增加一条直线l_{n+1}（它与l_1，l_2，…，l_n都相交，并且没有三条直线交于一点），那么这条直线l_{n+1}就与原来的n条直线相交n个点，显然这n个点又把直线l_{n+1}分成$n+1$段，而每一段穿过原来的某一

区域时，将它一分为二，这就增加了$n+1$个部分。所以有

$$f(n+1)=f(n)+n+1.$$

由例7有　　$f(n)=\frac{1}{2}n(n+1)+f(1)-1$。

因为一直线将平面分为两部分，所以，$f(1)=2$，于是

$$f(n)=\frac{1}{2}n(n+1)+2-1$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)+1>\frac{1}{2}n(n+1)$$

与题设矛盾。因此，这n条直线中至少有两条直线平行。

（三）　递归法

这一方法的要点是，先将函数方程按递归公式的形式表达出来，然后再求其解的表达式。

我们知道，给出一个数列，通常有三种表示法：通项公式、递推公式、递归公式。

一如自然数列，1，2，3，…，n，…。

通项公式：$f(n)=n$

递推公式：$f(n+1)=f(n)+1$

递归公式：$f(n+2)=2f(n+1)-f(n)$

二如自然数平方数列：1^2，2^2，3^2，…，n^2，…。

通项公式：$f(n)=n^2$

递推公式：$f(n+1)=f(n)+2n+1$

递归公式：$f(n+3)=3f(n+2)-3f(n+1)+f(n)$。

关于数列的三种表示法，有三点值得说明：

一是用函数方程的观点来看，递推公式与递归公式都是

函数方程，而其通项公式则是它们的一个解。

二是递归公式是递推公式的一种特殊形式，一般可以由递推公式导出相应的递归公式。

三是所述三种表达式与数列的关系是：

若通项公式确定，则数列唯一确定；

若递归公式确定，则一般地说数列不能唯一确定，还需视其“初始条件”来确定。

如在递归公式

$$f(n+3)=3f(n+2)-3f(n+1)+f(n)$$

中，若取$f(1)=1^2$，$f(2)=2^2$，$f(3)=3^2$，则易依次推出

$f(4)=4^2$，$f(5)=5^2$，$\cdots$，$f(n)=n^2$，$\cdots$

若取$f(1)=0$，$f(2)=2$，$f(3)=1$，…，则有$f(4)=-3$，$f(5)=-10$，$f(6)=-20$，…。

递归公式的一般表达式为

$$f(n+k)=a_1f(n+k-1)+a_2f(n+k-2)+\cdots+a_kf(n).\quad(A)$$

其中a_1，a_2，…，a_k为常数，我们称上式(A)为K阶递归公式。若给定$f(1),f(2),\cdots,f(k)$这k个初始条件后，(A)式的解唯一。

为了求出一般K阶递归公式的解，我们构造一个首项为1，公比为q的等比数列：

1，q，q^2，…，q^{n-1}，…

使它满足K阶递归公式，即有$f(n)=q^{n-1}$ $(q\neq0)$。

则$q^{n+k-1}=a_1q^{n+k-2}+a_2q^{n+k-3}+\cdots+a_kq^{n-1}$

化简得 $$q^k=a_1q^{k-1}+a_2q^{k-2}+\cdots+a_k \quad (*)$$

则q为$(*)$的根。这样一来，等比数列只要它的公比q能满足$(*)$，则它的通项公式$f(n)=q^{n-1}$即为函数方程(A)的解。我

们称(＊)为K阶递归公式(A)的特征方程．易证：

(1) 若$f(n)$为函数方程(A)的一个解，则$\alpha f(n)$ (α为常数)也是函数方程(A)的解；

(2) 若$f_1(n)$和$f_2(n)$均为函数方程(A)的解，则$\alpha f_1(n)+\beta f_2(n)$ (α，β为常数)也是函数方程(A)的解．

于是，我们通过解函数方程相应的特征方程（这一般是一个代数方程)，即可求出函数方程的解．

例9 若 $f(1)=\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}$，$f(2)=\dfrac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta}$ $(\alpha\neq\beta)$

且$f(n+2)=(\alpha+\beta)f(n+1)-\alpha\beta f(n)$ (1)

求证： $f(n)=\dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$．

证明： 考虑(1)的特征方程

$$q^2=(\alpha+\beta)q-\alpha\beta.$$

解得$q_1=\alpha$，$q_2=\beta$．

于是 $f_1(n)=q_1^{n-1}=\alpha^{n-1}$，$f_2(n)=q_2^{n-1}=\beta^{n-1}$．

从而 $f(n)=A\alpha^{n-1}+B\beta^{n-1}$为方程(1)的解．

由初始条件$f(1)=\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}$，$f(2)=\dfrac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta}$求出

$$A=\frac{\alpha^2(\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)^2},\qquad B=\frac{\beta^2(\beta-\alpha)}{(\alpha-\beta)^2}.$$

因此，$f(n)=\dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$．

注： 在很特殊的情况下，特征方程

$$q^k=a_1q^{k-1}+a_2q^{k-2}+\cdots+a_k$$

恰好有k重根，即$(q-\alpha)^k=0$.

则　　$q_1=q_2=\cdots=q_k=\alpha$.

这时，不难验证：

$f_1(n)=\alpha^{n-1}, f_2(n)=(n-1)\alpha^{n-1}$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots f_k(n)=(n-1)^{k-1}\alpha^{n-1}$

均为相应递归公式的解．按性质有

$$f(n)=[B_0+B_1(n-1)+\cdots+B_{k-1}(n-1)^{k-1}]\alpha^{n-1}$$

也为它的解．若当初始条件$f(1)$，$f(2)$，$\cdots$，$f(k)$给定时，则可由一般解确定β_0，β_1，β_2，$\cdots$，β_{k-1}，得到它的唯一解．

例10　求自然数列前n项的平方和：

$$f(n)=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2.$$

解：由题意易得函数方程

$$f(n+1)=f(n)+(n+1)^2.$$

这是递推公式形式．由此变形为递归公式

$$f(n+4)=4f(n+3)-6f(n+2)+4f(n+1)-f(n).$$

其对应的特征方程为

$$q^4-4q^3+6q^2-4q+1=0$$

即　　$(q-1)^4=0$.

因此，$q_1=q_2=q_3=q_4=1$.

故知a^2+b^2的最小可能值是$\frac{4}{5}$，此时，$q=\pm 2$，$p=\pm\frac{6}{5}$，从而易知$a=\pm\frac{4}{5}$，$b=-\frac{2}{5}$.

三、关于高斯函数的试题

例1　（75年美国纽约竞赛题）

设$[x]$表示使$n\leqslant x$的最大整数n，又设

$$f(x)=\left[\frac{x}{12\frac{1}{2}}\right]\cdot\left[\frac{-12\frac{1}{2}}{x}\right]$$

如果$0<x<90$，那么$f(x)$的值域含k个元素，求k。

解：因为当$0<x<12\frac{1}{2}$时，有$\left[\frac{x}{12\frac{1}{2}}\right]=0$，

则 $$f(x)=\left[\frac{x}{12\frac{1}{2}}\right]\cdot\left[\frac{-12\frac{1}{2}}{x}\right]=0，即f(x)=0。$$

当 $12\frac{1}{2}\leqslant x<90$时，即当$12\frac{1}{2}k\leqslant x<12\frac{1}{2}\cdot(k+1)$

$(k=1,2,\cdots,7)$时，有$k\leqslant\frac{x}{12\frac{1}{2}}<k+1$，且$-1\leqslant\frac{-12\frac{1}{2}}{x}<0$，

则$\left[\frac{x}{12\frac{1}{2}}\right]=k$ 且$\left[\frac{-12\frac{1}{2}}{x}\right]=-1$。于是

$$f(x)=\left[\frac{x}{12\frac{1}{2}}\right]\cdot\left[\frac{-12\frac{1}{2}}{x}\right]$$

$$=k(-1)=-k，即f(x)=-k。$$

即$f(x)$的值域中含有8个元素：0，-1，-2，-3，-4，-5，-6，-7。

例2 （第36届美国中学数学竞赛）

设$[x]$表示小于或等于x的最大整数，则方程$4x^2-40[x]+51=0$的实数解的个数是：

(A)0；(B)1；(C)2；(D)3；(E)4.

解：因为$x-1<[x]\leqslant x$，所以由原方程得

$$4x^2-40x+51\leqslant 0 \quad (1)$$

$$4x^2-40(x-1)+51>0 \quad (2)$$

解(1)得 $\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant \frac{17}{2}$.

解(2)得 $x>\frac{13}{2}$ 和 $x<\frac{7}{2}$.

因此有 $\frac{3}{2}\leqslant x<\frac{7}{2}$， $\frac{13}{2}<x\leqslant\frac{17}{2}$.

由原方程得 $[x]=\frac{4x^2+51}{40}=1+\frac{4x^2+11}{40}$.

因$[x]$为整数，所以$\frac{4x^2+11}{40}$也应为整数．而据x的取值范围，有$\frac{1}{2}\leqslant\frac{4x^2+11}{40}<\frac{3}{2}$及$\frac{9}{2}<\frac{4x^2+11}{40}\leqslant\frac{15}{2}$．其间只有1，5，6，7四个整数，故原方程有四个实根，因而应选答案(E)．

例3 （第10届美国数学竞赛题）

对自然数n和一切实数x，求证：

$$[nx]\geqslant\frac{[x]}{1}+\frac{[2x]}{2}+\cdots+\frac{[nx]}{n}.$$

证明：用数学归纳法。

设 $A_n = \frac{[x]}{1} + \frac{[2x]}{2} + \cdots + \frac{[nx]}{n}$。

（1） 当$n=1$时，$[nx]=[x]$，$A_n = \frac{[x]}{1} = [x]$. 原不等式成立。

（2） 假设当$k<n$时，原不等式成立，即已证$A_1 \leqslant [x]$，$A_2 \leqslant [2x]$，…，$A_{n-1} \leqslant [(n-\ )x]$.

由于$A_n - A_{n-1} = \frac{[nx]}{n}$，所以$nA_n - nA_{n-1} = [nx]$。让$n$跑遍$\{1, 2, \cdots, n\}$得下列$n$个等式：

$nA_n - nA_{n-1} = [nx]$，

$(n-1)A_{n-1} - (n-1)A_{n-2} = [(n-1)x]$，

……………………………………………

$2A_2 - 2A_1 = [2x]$，

$A_1 = [x]$。

两边分别相加，得

$nA_n - (A_1 + A_2 + \cdots + A_{n-1}) = [x] + [2x] + \cdots + [(n-1)x] + [nx]$.

$nA_n = [x] + [2x] + \cdots + [(n-1)x] + [nx] + A_{n-1} + A_{n-2} + \cdots + A_2 + A_1$

由归纳假设知

$nA_n \leqslant [x] + [2x] + \cdots + [(n-1)x] + [nx] + [(n-1)x] + [(n-2)x] + \cdots + [2x] + [x] = ([x] + [(n-1)x]) + ([2x] + [n-2)x)]) + \cdots + ([(n-1)x] + [x] + [nx]$

根据前面所讲性质$[x_1] + [x_2] \leqslant [x_1 + x_2]$有

$$nA_n \leqslant [nx]+[nx]+\cdots+[nx]+[nx]=n[nx].$$

故 $A_n \leqslant [nx]$。

注：本例，在其竞赛委员会看来，它是1981年美国数学竞赛试题中最难的一题．公布的标准答案十分烦琐，但上述解法十分简捷．

例4 （第4届美国数学竞赛题）

证明 $[5x]+[5y] \geqslant [3x+y]+[3y+x]$。

其中x、$y \geqslant 0$，且$[n]$表示小于或等于n的最大整数（例如$[\sqrt{2}]=1$）。

证明：令$x=x_1+x_0$且$y=y_1+y_0$，其中x_1、y_1是非负整数且$0 \leqslant x_0, y_0 < 1$，于是原不等式变为

$$x_1+y_1+[5x_0]+[5y_0] \geqslant [3x_0+y_0]+[3y_0+x_0].$$

显然，只要证明$0<x_0$，$y_0<1$，

$$[5x_0]+[5y_0] \geqslant [3x_0+y_0]+[3y_0+x_0]. \qquad (A)$$

即 $$[5x_0]-[3x_0+y_0] \geqslant [3y_0+x_0]-[5y_0] \qquad (B)$$

事实上，（1）若$3y_0+x_0 \leqslant 5y_0$，即$x_0 \leqslant 2y_0$，容易验证式成立．

（2）若$3y_0+x_0>5y_0$，即$x_0>2y_0$，设$5x_0=a+b$，$5y_0=c+d$，其中a、c是整数且$0 \leqslant b$，$d<1$．则由（A）式得

$$a+c+[b]+[d] \geqslant \left[\frac{3a+3b}{5}+\frac{c+d}{5}\right]+\left[\frac{3c+3d}{5}+\frac{a+b}{5}\right],$$

即若$$a+c \geqslant \left[\frac{3a+c+3b+d}{5}\right]+\left[\frac{3c+a+3d+b}{5}\right] \qquad (C)$$

成立，则（A）一定成立．事实上，

因为$2y_0<x_0<1$，所以$2c \leqslant a \leqslant 4$．

又　$3b+d<4$，$3d+b<4$。

因此，对于下列情形

a	4	4	4	3	3	2	2	1
c	2	1	0	1	0	1	0	0

易于验证它们都适合(C)式．从而(A)式成立。

例5　(第37届美国中学数学竞赛题)

若$[x]$表示小于或等于x的最大整数，则

$\sum_{N=1}^{1024}[\log_2 N]=$(A)8192，(B)8204，(C)9218，(D)$[\log_2(1024!)]$，(E)不同于(A)～(D)的答案。

解：因为

$$[\log_2 N]=\begin{cases}0 & \text{对于}N=1\\ 1 & \text{对于}2\leqslant N<2^2\\ 2 & \text{对于}2^2\leqslant N<2^3\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ 9 & \text{对于}2^9\leqslant N<2^{10}\\ 10 & \text{对于}2^{10}=N\end{cases}$$

所以$\sum_{N=1}^{1024}[\log_2 N]=0+1(2^2-2)+2(2^3-2^2)+3(2^4-2^3)+\cdots+8(2^9-2^8)+9(2^{10}-2^9)+10=9\times 2^{10}-(2^9+2^8+2^7+\cdots+2^2+2)+10=9\times 2^{10}-(2^{10}-2)+10=8\times 2^{10}+12=8204$.

因此，应选答案(B)。

另解：由于连续整数2^n，2^n+1，2^n+2，…，$2^n+2^n-1=2^{n+1}-1$共2^n个数，它们的2底对数的整数部分都是n，因而所求和数S是

$$S=\sum_{N=1}^{1024}[\log_2 N]=\sum_{n=0}^{9}\sum_{K=0}^{2^n-1}[\log_2(2^n+K)]+[\log_2 2^{10}]$$

$$=\sum_{n=0}^{9}n\cdot 2^n+10.$$

即 $S=1\cdot 2+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\cdots+9\cdot 2^9+10$,

$2S=1\cdot 2^2+2\cdot 2^3+3\cdot 2^4+\cdots+9\cdot 2^{10}+20$.

相减得$S=10-2-2^2-2^3-\cdots-2^9+9\cdot 2^{10}$

$=10-2(2^9-1)+9\cdot 2^{10}$

$=8.2^{10}+12=8204$.

因此应选答案(B).

例 6 (第37届美国中学数学竞赛题)

小于或等于x的最大整数与大于或等于x的最小整数的和是5，则x的解集是.

(A)$\left\{\frac{5}{2}\right\}$; (B)$\{x|2\leqslant x\leqslant 3\}$; (C)$\{x|2\leqslant x<3\}$;

(D)$\{x|2|<x\leqslant 3\}$; (E)$\{x|2<x<3\}$.

解：设$[x]$表示小于或等于x的最大整数，

则 $x-1<(x)\leqslant x$ ①

又设(x)表示大于或等于x的最小整数，

则 $x\leqslant(x)<x+1$ ②

已知 $[x]+(x)=5$ ③

①+②：$2x-1<[x]+(x)<2x+1$

由③：$2x-1<5<2x+1$

解得 $2<x<3$ 则选答案(E).

四、关于函数方程的试题

例 1 （第17届国际数学竞赛题）

一个数列$\{u_n\}$定义为：

$$u_0=2, u_1=\frac{5}{2},\ u_{n+1}=u_n(u_{n-1}^2-2)-u_1(n=1,2\cdots).$$

证明：对正整数n，有$[u_n]=2^{\frac{1}{3}(2^n-(-1)^n)}$。

（这里$[x]$表示小于或等于x的最大整数）

证明：先观察这个数列的前几项

$$u_0=2=2^0+2^{-0},\qquad u_1=\frac{5}{2}=2^1+2^{-1},$$

$$u_2=\frac{5}{2}\left(2^2-2\right)-\frac{5}{2}=5-\frac{5}{2}=\frac{5}{2}=2^1+2^{-1},$$

$$u_3=\frac{5}{2}\left(\left(\frac{5}{2}\right)^2-2\right)-\frac{5}{2}=\ 8\frac{1}{8}=2^3+2^{-3},$$

………………………………………

再猜想 $u_n=2^{f(n)}+2^{-f(n)}$

其中f是某个特定函数。

将上式代入$\{u_n\}$定义中的递推式，得到

$$2^{f(n+1)}+2^{-f(n+1)}=(2^{f(n)}+2^{-f(n)})(2^{2f(n-1)}+2^{-2f(n-1)}+2-2)-2^1-2^{-1}=2^{f(n)+2f(n-1)}+2^{f(n)-2f(n-1)}+2^{-(f(n)-2f(n-1))}+2^{-(f(n)+2f(n-1))}-2^1-2^{-1}\qquad\text{(A)}$$

解函数方程$f(n+1)=f(n)+2f(n-1)$且$f(0)=0$，$f(1)=1$。

显然有$f(n+2)=f(n+1)+2f(n)$且$f(0)=0$，$f(1)=1$。

应用前面所讲的递归法，有其特征方程

$q^2-q-2=0$。解得$q_1=2$，$q_2=-1$。

于是$f(n)=a(2)^{n-1}+b(-1)^{n-1}$

已知 $f(0)=0$，$f(1)=1$，则得 $a=\frac{2}{3}, b=\frac{1}{3}$。

因此 $f(n)=\frac{1}{3}(2^n-(-1)^n)$即为函数方程的解。再将它代入(A)中验证，易知它确实满足(A)。

从而 $$u_n=2^{\frac{1}{3}(2^n-(-1)^n)}+2^{-\frac{1}{3}(2^n-(-1)^n)}$$

符合$\{u_n\}$的定义。

由于对正整数n，

$$f(n)=\frac{1}{3}(2^n-(-1)^n)$$

总是正整数，所以$2^{-f(n)}$是一个真分数，因此

$$[u_n]=2^{\frac{1}{3}(2^n-(-1)^n)}.$$

例 2 （79年美国中学生数学竞赛题）

对于每一对实数x，y，函数$f(x)$满足函数方程

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy+1.$$

且若$f(1)=1$，那么满足$f(n)=n(n\neq 1)$的整数数目个数为

(A)0，(B)1，(C)2，(D)3，(E)无穷多。

注：本例的一般解法是先求出$f(x)$，再利用$f(n)=n$定出n的个数。但由于它较为特殊，故可得如下解法。

解：因为$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy+1$　　$(x、y\in R)$

令 $x=n$，$y=1$，上式变为

$$f(n+1)=f(n)+f(1)+n+1=f(n)+n+2.$$

则有 $f(2)=f(1)+1+2$

$$f(3)=f(2)+2+2$$

$$f(4)=f(3)+3+2$$

……………………

$$f(n)=f(n-1)+(n-1)+2.$$

于是有$f(n)=f(1)+(1+2+3+\cdots+(n-1))+2(n-1)$

即 $f(n)=\dfrac{n(n-1)}{2}+2n-1 \qquad (n\in N)$

再令$f(n)=n$，则有 $\dfrac{n(n-1)}{2}+2n-1=n$。

解得 $n=1$，$n=-2$. 因而应选答案(C)。

第　六　讲

数学竞赛中不等式的证明

不等式的证明，没有固定的程序可循，技巧多样，方法灵活，难度较高，作为竞赛题型比较合适，所以历年来国内外的各种数学竞赛中广泛出现不等式的证明问题。这里，我们通过一些比较典型的竞赛试题的解答，提出一套证题方法与常用技巧，以便打下良好的基础，进而顺利解决有关问题。

一、比较法

用比较法证明不等式的基本思想是：通过证明$A-B>0$，证明$A>B$成立；或当$B>0$时，若$\frac{A}{B}>1$，则$A>B$成立。其步骤是：求差（求商）——变形——判断。关键在于变形，常见的方法有：通分、因式分解、配方等。

例1　（第18届全苏中学生数学奥林匹克试题）

求证：对任何非负数a和b，不等式

$$\frac{1}{2}(a+b)^2+\frac{1}{4}(a+b)\geqslant a\sqrt{b}+b\sqrt{a}\text{成立。}$$

证明：因为$\frac{1}{2}(a+b)^2+\frac{1}{4}(a+b)-(a\sqrt{b}+b\sqrt{a})$

$$=\frac{1}{2}(a+b)(a+b+\frac{1}{2})-\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})$$

$$\geqslant\sqrt{ab}(a+b+\frac{1}{2})-\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})$$

$$=\sqrt{ab}(a+b+\frac{1}{2}-\sqrt{a}-\sqrt{b})$$

$$=\sqrt{ab}\left[(\sqrt{a}-\frac{1}{2})^2+(\sqrt{b}-\frac{1}{2})^2\right]\geqslant 0,$$

所以，$\frac{1}{2}(a+b)^2+\frac{1}{4}(a+b)\geqslant a\sqrt{b}+b\sqrt{a}$.

例 2 （83年瑞士中学生数学奥林匹克试题）

设a，b，c为正数，试证：

$$abc\geqslant(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c). \tag{1}$$

分析：若$a\geqslant b+c$，则(1)式右端$\leqslant 0$，左端$\geqslant 0$，因而(1)式显然成立．于是，我们在$a<b+c$且$a\geqslant b\geqslant c>0$的假设下证明之．

证法一 因为$2\{abc-[(b+c)-a][(c+a)-b][(a+b)-c]\}$
$=(a-b)^2(a+b-c)+(b-c)^2(b+c-a)+(c-a)^2(c+a-b)$
$\geqslant 0$.

所以，$abc-(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)\geqslant 0$，

于是，$abc\geqslant(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$.

证法二 $abc-(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$

$$=\frac{(a+b-c)+(c+a-b)}{2}\cdot\frac{(b+c-a)+(a+b-c)}{2}$$

$$\cdot\frac{(a+c-b)+(b+c-a)}{2}$$

$$-(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$$

$$\geqslant\sqrt{(a+b-c)(c+a-b)}\cdot\sqrt{(b+c-a)(a+b-c)}$$

$$\cdot\sqrt{(a+c-b)(b+c-a)}$$

$$-(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$$

$$=(a+b-c)(c+a-b)(b+c-a)-(b+c-a)(c+a-b)$$

$$\cdot(a+b-c)=0,$$

即 $abc-(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)\geqslant0$,

则 $abc\geqslant(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$。

例 3 （第 6 届国际竞赛题）

a、b、c表示某一三角形边长，证明

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\leqslant3abc.$$

证明： 因为 $\dfrac{a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)}{3abc}$

$$=\frac{a}{3}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{a}{bc}\right)+\frac{b}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}-\frac{b}{ac}\right)+\frac{c}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{c}{ab}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{bc}+\frac{a^2+c^2-b^2}{ac}+\frac{a^2+b^2-c^2}{ab}\right)$$

$$=\frac{2}{3}(\cos A+\cos B+\cos C)\leqslant1,$$

所以，$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\leqslant3abc$.

例 4 （第 3 届美国数学奥林匹克试题）

若a，b，c都是正数，证明

$$a^ab^bc^c\geqslant(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}.$$

证明：由于不等式关于a，b，c的对称性，不妨设$a\geqslant b\geqslant c>0$，则

$$\frac{a^a b^b c^a}{(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{3}}\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{b-c}{3}}\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{a-c}{3}}\geqslant 1$$

因而$a^a b^b c^c\geqslant(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$.

二、综合法

所谓综合法，就是由已知条件或已被证明的基本不等式出发，运用不等式的性质，推导出所要证明的结论，是一种由因导果的方法.

（一）熟悉常用的基本不等式是熟练地运用综合法的基础.

例如：（1）$a^2\geqslant 0,(a-b)^2\geqslant 0$ （a、b是实数）；

（2）$a^2+b^2\geqslant 2ab$ （a、b是实数）；

（3）$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2$ （a、b同号）；

（4）$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ （$a>0$，$b>0$）；

（5）$a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$ （$a>0,b>0$，$c>0$）；

（6）$\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$ （$a>0$，$b>0$，$c>0$）.

以上各式当且仅当各数相等时，取等号.

例 5 （78年广东省竞赛题）

设a、b、c都是正数，且$a+b+c=1$，证明：

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant 9.$$

证明：因为$a+b+c=1$，

$$\text{所以}\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{c}$$

$$=3+\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)$$

$$\geqslant 3+2+2+2=9.$$

另证：因为$\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$，

$$\text{所以}\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\geqslant 3.$$

$$\text{又由}\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{3}\geqslant\sqrt[3]{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}}=\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\geqslant 3,$$

则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant 9.$

例6 （79年陕西省竞赛题）

已知a、b、c、d为四个正数，且$abcd=1$.

求证：$a^2+b^2+c^2+d^2+ab+ac+ad+bc+bd+cd$的最小值为10.

证明： 因为$a^2+b^2+c^2+d^2+ab+ac+ad+bc+bd+cd$

$$=(a-b)^2+(c-d)^2+3ab+ac+ad+bc+bd+3cd$$

$$\geqslant 3ab+ac+ad+bc+bd+3cd$$

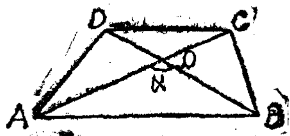
$$=3(ab+cd)+(ac+bd)+(ad+bc)$$

$$=3\left(ab+\frac{1}{ab}\right)+\left(ac+\frac{1}{ac}\right)+\left(ad+\frac{1}{ad}\right)$$

$$\geqslant 3\times 2+2+2=10.$$

所以，应证结论成立。

例7 （85年奥一波数学竞赛题）



（图6—1）

证明： 对于任何面积为1的凸四边形，它的所有边长和对角线的长度总和$\geqslant 4+\sqrt{8}$。

证明： 如图6—1。

要证： $AB+BC+CD+DA+AC+BD\geqslant 4+\sqrt{8}$。

事实上，$1=\frac{1}{2}(AO\cdot BO+BO\cdot CO+CO\cdot DO+DO\cdot AO)\sin\alpha$

$$\leqslant\frac{1}{2}(AO+CO)(BO+DO)$$

$$=\frac{1}{2}AC\cdot BD\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{AC+BD}{2}\right)^2,$$

则知 $AC+BD\geqslant\sqrt{8}$。

又由 $2=\frac{1}{2}(AB\cdot BC\sin\angle ABC+BC\cdot CD\sin\angle BCD$

$$+CD\cdot DA\sin\angle CDA+DA\cdot AB\sin\angle DAB)$$

$$\leqslant\frac{1}{2}(AB\cdot BC+BC\cdot CD+CD\cdot DA+DA\cdot AB)$$

$$=\frac{1}{2}(AB+CD)(BC+DA)$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left[\frac{(AB+CD)+(BC+DA)}{2}\right]^2$$

知 $AB+BC+CD+DA\geqslant\sqrt{16}=4$.

综上得知原命题为真.

（二）几个不等式相加或相乘是综合法中常用的手法。

例 8 （57年上海市竞赛题）

若A为锐角，求证

$$\sec A+\sec\frac{A}{2}+\sec\frac{A}{3}+\cdots+\sec\frac{A}{n}+\csc A$$

$$+\csc\frac{A}{2}+\csc\frac{A}{3}+\cdots+\csc\frac{A}{n}$$

$$>\sec A\csc A+\sec\frac{A}{2}\csc\frac{A}{2}+\sec\frac{A}{3}\csc\frac{A}{3}+\cdots$$

$$+\sec\frac{A}{n}\csc\frac{A}{n}.$$

证明：因 $\sec A+\csc A=\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\sin A}$

$$=\frac{\sin A+\cos A}{\sin A\cos A},$$

又因　$(\sin A+\cos A)^2=1+\sin 2A>1$，

所以　$\sin A+\cos A>1$，

$$\sec A+\csc A=\frac{\sin A+\cos A}{\sin A\cos A}>\frac{1}{\sin A\cos A},$$

则　$\sec A+\csc A>\sec A\csc A$。

同理，$\sec\frac{A}{2}+\csc\frac{A}{2}>\sec\frac{A}{2}\csc\frac{A}{2}$，

$$\sec\frac{A}{3}+\csc\frac{A}{3}>\sec\frac{A}{3}\csc\frac{A}{3},$$

……

$$\sec\frac{A}{n}+\csc\frac{A}{n}>\sec\frac{A}{n}\csc\frac{A}{n}.$$

（因为$\frac{A}{2}$，$\frac{A}{3}$，…，$\frac{A}{n}$均为锐角）

将上述不等式两边各自相加，即得求证之不等式。

例 9　（62年成都市竞赛题）

设A、B、C是锐角三角形的三内角，证明：

$$\sin A+\sin B+\sin C>\cos A+\cos B+\cos C>1$$

证明： 因$C<\frac{\pi}{2}$，则$A+B=\pi-C>\frac{\pi}{2}$，即$A>\frac{\pi}{2}-B$。

又因$A<\frac{\pi}{2}$，$B<\frac{\pi}{2}$，故$0<\frac{\pi}{2}-B<A<\frac{\pi}{2}$。

因此，$\sin A>\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)=\cos B$，

即 $\sin A > \cos B$。

同理，$\sin B > \cos C$，

$\sin C > \cos A$。

于是 $\sin A + \sin B + \text{sis} C > \cos A + \cos B + \cos C$，

又由 $\cos A + \cos B + \cos C = \cos A + \cos B + \cos[\pi - (A+B)]$

$$= 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} - 2\cos^2\frac{A+B}{2} + 1$$

$$= 2\cos\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right) + 1$$

$$= 2\cos\frac{\pi - C}{2}\left[-2\sin\frac{A}{2}\sin\left(-\frac{B}{2}\right)\right] + 1$$

$$= 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + 1 > 1.$$

综上得知所证命题成立。

例10 （79年天津市竞赛题）

设定义域为一切实数的函数$f(x)$满足下列条件：（1）对于任意实数x，均有$f(x) \geqslant 2$；（2）对于任意实数x_1，x_2均有$f(x_1 + x_2) \leqslant f(x_1) + f(x_2)$。试证：对于任意实数$x_1$，$x_2$均有

$$\lg[f(x_1 + x_2)] \leqslant \lg[f(x_1)] + \lg[f(x_2)].$$

证法一 对于任意实数x_1、x_2，由题设(1)有$f(x_1) \geqslant 2$，$f(x_2) \geqslant 2$，于是有

$$f(x_1)f(x_2) \geqslant 2f(x_2),\quad f(x_1)f(x_2) \geqslant 2f(x_1).$$

将此二式相加有$f(x_1) + f(x_2) \leqslant f(x_1)f(x_2)$，

再由题设(2)得 $f(x_1 + x_2) \leqslant f(x_1)f(x_2)$，

最后由题设(1)知$\lg[f(x_1+x_2)]\leqslant\lg[f(x_1)f(x_2)]$

$$=\lg[f(x_1)]+\lg[f(x_2)].$$

证法二 由题设(1)有

$$\frac{1}{f(x_1)}\leqslant\frac{1}{2},\ \frac{1}{f(x_2)}\leqslant\frac{1}{2}.$$

则 $\dfrac{1}{f(x_1)}+\dfrac{1}{f(x_2)}\leqslant\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=1,$

则 $\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{f(x_1)f(x_2)}\leqslant1$，故$f(x_1)+f(x_2)\leqslant f(x_1)f(x_2)$.

以下同证法一(略).

例11 (78年上海市竞赛题)

若$a>b>c>0$，求证：

$$a^{2a}b^{2b}c^{2c}>a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}.$$

证明：因为$\frac{a}{b}>1$，$a-b>0$，所以

$$\frac{a^{a-b}}{b^{a-b}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}>1,$$

则 $a^ab^b>a^bb^a$,

同理，$a^ac^c>a^cc^a$,

$b^bc^c>b^cc^b$,

将上述不等式两边相乘，则得

$a^{2a}b^{2b}c^{2c}>a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}$.

(三) 条件不等式的证明在于恰当地运用条件。

例12 (第21届全苏数学奥林匹克试题)

正数a，b，c，A，B，C满足条件

$$a+A=b+B=c+C=K,$$

求证：$aB+bC+cA<K^2$。

证明：由题设有

$$K^3=(a+A)(b+B)(c+C)$$
$$=abc+ABC+aB(c+C)+bC(a+A)+cA(b+B)$$
$$=abc+ABC+K(aB+bC+cA),$$

又由$abc+ABC>0$，则

$$K(aB+bC+cA)<K^3,$$

即有　$aB+bC+cA<K^2$。

例13　（第三届全国数学冬令营选拔赛试题）

设三个正实数a，b，c满足

$$(a^2+b^2+c^2)^2>2(a^4+b^4+c^4),$$

求证：a，b，c一定是某个三角形的三条边长。

证明：不妨设$a\geqslant b\geqslant c>0$，则由题设得

$$2(a^4+b^4+c^4)-(a^2+b^2+c^2)^2<0.$$

经化简分解因式得

$$(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(a-b-c)<0.$$

再由所设知$a+b+c>0$，$a-b+c>0$，$a+b-c>0$，则$a-b-c<0$，即$a<b+c$。又有$b<a+c$，$c<a+b$。因此，a，b，c一定是某个三角形的三条边长。

（四）善于“反向”使用基本不等式。

例14　（78年天津市竞赛题）

设a，b，c为任意三角形三边长，

$$I=a+b+c,\quad S=ab+bc+ac,$$

证明：$3S\leqslant I^2<4S$。

证明：(1) 因为 $2ab \leqslant a^2+b^2$，$2bc \leqslant b^2+c^2$，$2ca \leqslant c^2+a^2$，所以$2(ab+bc+ca) \leqslant 2(a^2+b^2+c^2)$，

即 $ab+bc+ca \leqslant a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$，

则有 $3(ab+bc+ca) \leqslant (a+b+c)^2$，

即 $3S \leqslant I^2$。

(2) 由题设易得 $a^2+b^2+c^2<2S$，即有$I^2<4S$。

例15 (56年上海市竞赛题)

设$\triangle ABC$为任意三角形，求证：

$$\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{C}{2} \geqslant 1\text{。}$$

证明：因为$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}=1$，

所以只须证明

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2} \leqslant \operatorname{tg}^2\frac{A}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}\text{。}$$

事实上

$$2\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} \leqslant \operatorname{tg}^2\frac{A}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{B}{2},$$

$$2\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} \leqslant \operatorname{tg}^2\frac{B}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{C}{2},$$

$$2\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2} \leqslant \operatorname{tg}^2\frac{C}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}\text{。}$$

将上述三式相加，则知所证不等式成立。

例16 （78年陕西省竞赛题）

设$a>0$，$b>0$且$a\neq b$，在a，b之间插入n个数x_1，x_2，…x_n，使a，x_1，x_2，…，x_n，b成等比数列。

求证：$\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n}<\dfrac{a+b}{2}$。

证明：因$a>0$，$b>0$且$a\neq b$，有$\sqrt{ab}<\dfrac{a+b}{2}$，所以，只须证明 $\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n}=\sqrt{ab}$。

事实上，设公比为q，则$x_1=aq$，$x_2=aq^2$，…，$x_n=aq^n$，$b=aq^{n+1}$，于是

$$x_1\cdot x_2\cdot\cdots x_n=a^nq^{1+2+3+\cdots+n}=a^nq^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

因此，$\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n}=aq^{\frac{n+1}{2}}$

$$=\sqrt{a^2q^{n+1}}=\sqrt{ab}.$$

即 $\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n}=\sqrt{ab}$.

三、分析法

所谓分析法，就是先假设结论成立，由此出发，利用不等式的性质，推出已知条件或绝对不等式，然后再倒推回去，得出结论，即是一种“由果索因”的方法。值得一提的是，使用这种方法时，要特别注意每步推理的可逆性，牢固掌握分析法的特点。

例17 （63年成都市竞赛题）

设a与b都是正数。

试证：$\sqrt{2}$必在二数$\frac{a}{b}$与$\frac{a+2b}{a+b}$之间。

证明：（1）假若$\sqrt{2}<\frac{a}{b}$，即$2b^2<a^2$。　　　　(A)

要证：$\frac{a+2b}{a+b}<\sqrt{2}$。

事实上，假设$\frac{a+2b}{a+b}<\sqrt{2}$成立，则因$a$，$b$都是正数可得$a+2b<\sqrt{2}(a+b)$，于是

$$(a+2b)^2<2(a+b)^2，\text{即}2b^2<a^2。$$

由(A)，即知$\frac{a+2b}{a+b}<\sqrt{2}<\frac{a}{b}$　成立。

(2) 如果$\sqrt{2}>\frac{a}{b}$，即$2b^2>a^2$　　　　(B)

要证：$\frac{a+2b}{a+b}>\sqrt{2}$。

事实上，假设$\frac{a+2b}{a+b}>\sqrt{2}$成立，则由$a$，$b$都是正数可得$a+2b>\sqrt{2}(a+b)$，于是

$(a+2b)^2>2(a+b)^2$，即$2b^2>a^2$。

由(B)便知$\frac{a+2b}{a+b}>\sqrt{2}$，所以$\frac{a}{b}<\sqrt{2}<\frac{a+2b}{a+b}$。

综上所述，便证明了本题。

例18　（第12届国际竞赛题）

给定自然数a，b，n，且$a>1$，$b>1$，$n>1$，A_{n-1}和A_n是a进制数系中的数，B_{n-1}和B_n是b进制数系中的数。A_{n-1}，A_n，B_{n-1}，B_n呈如下形式：

$A_{n-1}=x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_0$，$A_n=x_nx_{n-1}\cdots x_0$

（按a进制写出）；

$B_{n-1}=x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_0$，$B_n=x_nx_{n-1}\cdots x_0$

（按b进制写出）。

其中$x_n\neq0$，$x_{n-1}\neq0$。

证明：当$a>b$时，有$\dfrac{A_{n-1}}{A_n}<\dfrac{B_{n-1}}{B_n}$。

证明：由题设有$A_n=x_na^{n-1}+x_{n-1}a^{n-2}+\cdots+x_0$，

$A_{n-1}=x_{n-1}a^{n-2}+x_{n-2}a^{n-3}+\cdots+x_0$，

则　$A_n=x_na^{n-1}+A_{n-1}$。

同理，$B_n=x_nb^{n-1}+B_{n-1}$。

假设所证不等式$\dfrac{A_{n-1}}{A_n}<\dfrac{B_{n-1}}{B_n}$成立，

则有　$A_nB_{n-1}-A_{n-1}B_n>0$，

即　$(x_na^{n-1}+A_{n-1})B_{n-1}-(x_nb^{n-1}+B_{n-1})A_{n-1}>0$，

于是　$x_n(a^{n-1}B_{n-1}-b^{n-1}A_{n-1})>0$。

由$x_n>0$知$a^{n-1}B_{n-1}-b^{n-1}A_{n-1}>0$。

即　$a^{n-1}(x_{n-1}b^{n-2}+x_{n-2}b^{n-3}+\cdots+x_0)$

$-b^{n-1}(x_{n-1}a^{n-2}+x_{n-2}a^{n-3}+\cdots+x_0)>0$

则　$x_{n-1}(a^{n-1}b^{n-2}-a^{n-2}b^{n-1})+x_{n-2}(a^{n-1}b^{n-3}-a^{n-3}\cdot b^{n-1})+\cdots+x_0(a^{n-1}-b^{n-1})>0$　（*）

由条件$a>b$有$(a^{n-1}b^{n-2}-a^{n-2}b^{n-1})>0$，$(a^{n-1}b^{n-3}-a^{n-3}\cdot$

$b^{n-1})>0$，…，$(a^{n-1}-b^{n-1})>0$；

又$x_{n-1}>0$，$x_{n-2}\geqslant 0$，…，$x_0\geqslant 0$。

则不等式(*)显然成立。由此倒推回去，每步可逆，因此所证不等式成立。

例19 （第3届国际竞赛题）

已知a，b，c是三角形的三边长，S是面积，证明：$a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}S$。并求等号成立的条件。

证明：假设C是c边所对的角，且所证不等式$a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}S$成立。

则　$a^2+b^2+c^2-4\sqrt{3}S\geqslant 0$。

于是　$a^2+b^2+a^2+b^2-2ab\cos C-2\sqrt{3}ab\sin C\geqslant 0$，

因此　$2[a^2+b^2-2ab\sin(C+30°)]\geqslant 0$

故　$a^2+b^2\geqslant 2ab\sin(C+30°)$

由于$a^2+b^2\geqslant 2ab\geqslant 2ab\sin(C+30°)$，且每步可逆，因而倒推回去，可知原不等式成立。

显然，当且仅当$a=b=c$时成立等号。

四、反证法

首先假设结论不成立，由此通过合理的逻辑推理而导出矛盾，从而说明假设不对，因此应当肯定结论。

例20 （79年贵州省竞赛题）

设$f(x)=x^2+ax+b$，求证：$|f(1)|$、$|f(2)|$、$|f(3)|$之中，至少有一个不小于$\frac{1}{2}$。

证明：假设结论不对，则有$|f(1)|<\frac{1}{2}$，$|f(2)|<\frac{1}{2}$，$|f(3)|<\frac{1}{2}$，于是

$$|f(1)|+2|f(2)|+|f(3)|<\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=2\text{。}(*)$$

但由$f(x)=x^2+ax+b$，可得

$$f(1)=1+a+b$$
$$f(2)=4+2a+b$$
$$f(3)=9+3a+b$$

则 $f(2)-f(1)=3+a$

$f(3)-f(2)=5+a$

故 $f(1)-2f(2)+f(3)=2$

因此 $|f(1)|+2|f(2)|+|f(3)|\geqslant f(1)-2f(2)+f(3)=2$。

这与(*)式矛盾，所以假设不对，故原结论成立。

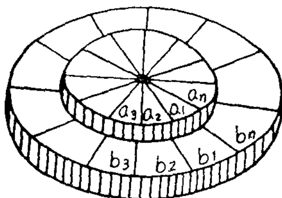
例21 （78年安徽省竞赛题）

有两个同心圆盘，各分成n个相等的小格，外盘固定，内盘可以转动（如图6－2）。内外两盘小格上分别填有实数：

a_1，a_2，a_3，…，a_n，b_1，b_2，b_3，…，b_n；且满足条件

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n<0$，

$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n<0$。



（图6-2）

证明：可将内盘转动到一个适当位置，使两个盘的小格

对齐，这时，两个盘n个对应小格内数字乘积的和为一正数。

证明： 假设结论不对，即有

$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_{n-1}b_{n-1}+a_nb_n\leqslant 0,$$

$$a_1b_2+a_2b_3+\cdots+a_{n-1}b_n+a_nb_1\leqslant 0,$$

$$a_1b_3+a_2b_4+\cdots+a_{n-1}b_1+a_nb_2\leqslant 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_1b_{n-1}+a_2b_n+\cdots+a_{n-1}b_{n-3}+a_nb_{n-2}\leqslant 0,$$

$$a_1b_n+a_2b_1+\cdots+a_{n-1}b_{n-2}+a_nb_{n-1}\leqslant 0.$$

将上述n个不等式相加，有

$a_1(b_1+b_2+\cdots+b_n)+a_2(b_1+b_2+\cdots+b_n)+\cdots+a_{n-1}(b_1+b_2+\cdots+b_n)+a_n(b_1+b_2+\cdots+b_n)\leqslant 0$,

即$(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n)(b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}+b_n)\leqslant 0$。

但由题设$a_1+a_2+\cdots+a_n<0$，$b_1+b_2+\cdots+b_n<0$有

$(a_1+a_2+\cdots+a_n)(b_1+b_2+\cdots+b_n)>0$。

与前面所得结果矛盾，因而假设不对．故必有一位置，使内外盘对应小格内数字乘积的和是一个正数。

例22 （第三届全国数学冬令营选拔赛试题）

设三个正实数a，b，c，满足

$(a^2+b^2+c^2)^2>2(a^4+b^4+c^4)$,

求证： a，b，c一定是某个三角形的三条边长。

证明： 假设结论不对，则

$a+b>c$，$b+c>a$，$c+a>b$

三者中至少有一个不成立，不妨设$a+b\leqslant c$。

因为a，$b>0$，所以有$b<c$，$a<c$。于是

$a+b-c\leqslant 0$，$a-b+c=a+(c-b)>a>0$,

$a-b-c\leqslant(a-b)-(a+b)=-2b<0$。

由此可得$(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)\geqslant 0$。

(*)

但由题设可知　$2(a^4+b^4+c^4)-(a^2+b^2+c^2)^2<0$，

经化简分解因式得

$(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(a-b-c)<0$

这与(*)式矛盾，由此得知$a+b>c$，$b+c>a$，$c+a>b$必同时成立，因而a，b，c，应为某三角形的三条边长.

五、判别式法

所谓判别式法，就是借助于二次方程的判别式来证明不等式的方法．下一讲中，关于柯西不等式的证法之一，便是判别式法的应用．这里，再举几例．

例23　(57年北京市竞赛题)

假设x，y，z都是实数，又知它们满足

$$x+y+z=a,\quad x^2+y^2+z^2=\frac{a^2}{2}\quad (a>0).$$

试证：x，y，z都不能是负数，也不能大于$\frac{2}{3}a$，

证明：由题设有

$$x^2+y^2+\left[a-(x+y)\right]^2=\frac{a^2}{2}.$$

即　$x^2+y^2+(x+y)^2-2a(x+y)+a^2=\frac{a^2}{2}$.

按y的幂次排列并除以2，有

$$y^2+(x-a)y+\left(x-\frac{a}{2}\right)^2=0.$$

因y是实数，故判别式大于或等于0，即

$$(x-a)^2-4\left(x-\frac{a}{2}\right)^2\geqslant 0.$$

亦即 $x(2a-3x)\geqslant 0$. 从而 $0\leqslant x\leqslant\frac{2}{3}a$.

同理可得 $0\leqslant y\leqslant\frac{2}{3}a$，$0\leqslant z\leqslant\frac{2}{3}a$.

综上可知所证结论成立.

例24 （第三届全国数学冬令营选拔赛试题）

设n个正实数a_1，a_2，…，a_n满足不等式

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)^2>(n-1)(a_1^4+a_2^4+\cdots+a_n^4) \quad (1)$$

(其中$n>3$)。求证这些数中的任何三个一定是某个三角形的三条边长.

证明： 由题设不等式(1)有

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{n-1}^2)^2+2(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{n-1}^2)a_n^2+a_n^4$$
$$>(n-1)(a_1^4+a_2^4+\cdots+a_{n-1}^4)+(n-1)a_n^4,$$

$$(n-2)a_n^4-2(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{n-1}^2)a_n^2+(n-1)(a_1^4+a_2^4+\cdots+a_{n-1}^4)-(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{n-1}^2)^2<0. \quad (2)$$

当视a_n^2为变数时，(2)式左端为二次三项式且于实数a_n^2取负值. 又因$n-2>0$，故有

$$\triangle=4\{(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{n-1}^2)^2-(n-2)(n-1)(a_1^4+a_2^4+\cdots+a_{n-1}^4)+(n-2)(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{n-1}^2)^2\}>0.$$

整理得 $(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{n-1}^2)^2>(n-2)(a_1^4+a_2^4+\cdots+a_{n-1}^4)$.

由此递推可得

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)>2(a_1^4+a_2^4+a_3^4).$$

再由例22知 a_1，a_2，a_3 为某个三角形的三边长．从而由对称性便知a_1，a_2，$\cdots a_n$中的任何三数均可作为某个三角形的三边之长．

六、放缩法

所谓放缩法，就是舍掉一些正(负)项而使不等式的各项之和变小(大)；或在分式中放大或缩小分式的分子与分母而达到证明不等式的目的．"放缩"二字形象，便于记忆与应用．

例25 （64年成都市竞赛题）

设n是大于1的正整数，试证：

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n^2}>1.$$

证明：因为要证不等式左边的项数是 $n^2-(n-1)$，即n^2-n+1，所以除第一项外还有n^2-n项．

又因左边除末项等于$\frac{1}{n^2}$外，其余各项均大于$\frac{1}{n^2}$．现在，不改变第一项，而将其它各项全都缩小为$\frac{1}{n^2}$，即得：

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n^2}>\frac{1}{n}+(n^2-n)\cdot\frac{1}{n^2}$$

$$=\frac{1}{n}+1-\frac{1}{n}=1.$$

则 $$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n^2}>1.$$

例26 （79年西安市竞赛题）

证明：对于一切自然数n，都有

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{n^n}<2-\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

证明：$\frac{1}{1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{n^n}<1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}$

$$<\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}=2-\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

例27 （第19届全苏中学生数学奥林匹克试题）

给定严格递增无穷正数列a_1，a_2，…，证明：存在（自然）数K_0，使得对一切$K\geqslant K_0$，有不等式

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_K}{a_{K+1}}<K-1.$$

证明：因为a_1，a_2，…，是递增正数列，所以不等式左边各项都小于1，K项的和显然小于K。现在要证它还小于$K-1$，只须证

$$K-\frac{a_1}{a_2}-\frac{a_2}{a_3}-\cdots-\frac{a_K}{a_{K+1}}>1.$$

事实上，这个不等式左边是

$$\left(1-\frac{a_1}{a_2}\right)+\left(1-\frac{a_2}{a_3}\right)+\cdots+\left(1-\frac{a_K}{a_{K+1}}\right)$$

$$=\frac{a_2-a_1}{a_2}+\frac{a_3-a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{K+1}-a_K}{a_{K+1}},$$

这里各项也是小于 1 的正数。我们试图把这些项分成两部分，使每一部分的和都大于$\frac{1}{2}$：

$$\left[\left(1-\frac{a_1}{a_2}\right)+\left(1-\frac{a_2}{a_3}\right)+\cdots+\left(1-\frac{a_{m-1}}{a_m}\right)\right]$$

$$+\left[\left(1-\frac{a_m}{a_{m+1}}\right)+\left(1-\frac{a_{m+1}}{a_{m+2}}\right)+\cdots+\left(1-\frac{a_K}{a_{K+1}}\right)\right]$$

$$=\left[\frac{a_2-a_1}{a_2}+\frac{a_3-a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_m-a_{m-1}}{a_m}\right]$$

$$+\left[\frac{a_{m+1}-a_m}{a_{m+1}}+\frac{a_{m+2}-a_{m+1}}{a_{m+2}}+\cdots+\frac{a_{K+1}-a_K}{a_{K+1}}\right]$$

$$>\left[\frac{a_2-a_1}{a_m}+\frac{a_3-a_2}{a_m}+\cdots+\frac{a_m-a_{m-1}}{a_m}\right]$$

$$+\left[\frac{a_{m+1}-a_m}{a_{K+1}}+\frac{a_{m+2}-a_{m+1}}{a_{K+1}}+\cdots+\frac{a_{K+1}-a_K}{a_{K+1}}\right]$$

$$=\frac{a_m-a_1}{a_m}+\frac{a_{K+1}-a_m}{a_{K+1}}$$

$$=\left(1-\frac{a_1}{a_m}\right)+\left(1-\frac{a_m}{a_{K+1}}\right).$$

因为数列无穷递增，所以可找到$a_m>2a_1$和$a_{K_0}>2a_m$，即$\frac{a_1}{a_m}<\frac{1}{2}$，$\frac{a_m}{a_{K_0}}<\frac{1}{2}$。于是，当$K\geqslant K_0$时，有

$$\left(1-\frac{a_1}{a_m}\right)+\left(1-\frac{a_m}{a_{K+1}}\right)>\left(1-\frac{a_1}{a_m}\right)+\left(1-\frac{a_m}{a_{K_0}}\right)$$

$$>\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

因此，所证不等式成立.

例28 （第20届全苏中学生数学奥林匹克试题）

证明：对于任意的正数a_1，a_2，a_3，…，a_n，不等式

$$\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_1+a_2}+\frac{3}{a_1+a_2+a_3}+\cdots+\frac{n}{a_1+a_2+\cdots a_n}$$

$$<4\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)\qquad 成立.$$

证明：设b_1，b_2，…，b_n是a_1，a_2，…，a_n按不减顺序排列成的数列. 因为对任意的$i(1\leqslant i\leqslant n)$，有

$$\frac{i}{a_1+a_2+\cdots+a_i}\leqslant\frac{i}{b_1+b_2+\cdots+b_i}$$

及 $$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\cdots+\frac{1}{b_n}.$$

因此，要证原不等式只须证明关于b_i的不等式

$$\frac{1}{b_1}+\frac{2}{b_1+b_2}+\frac{3}{b_1+b_2+b_3}+\cdots+\frac{n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$$

$$<4\left(\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\cdots+\frac{1}{b_n}\right).$$

估计上述不等式的项

$$\frac{2}{b_1+b_2}\leqslant\frac{2}{b_1+b_1}=\frac{1}{b_1},$$

对任意的K，$2\leqslant K\leqslant\frac{1}{2}(n+1)$，有

$$\frac{2K-1}{b_1+b_2+\cdots+b_{2K-1}}<\frac{2K}{b_K+b_{K+1}+\cdots+b_{2K-1}}$$

$$\leqslant\frac{2K}{Kb_{K-1}}=\frac{2}{b_{K-1}},$$

$$\frac{2K}{b_1+b_2+\cdots+b_{2K}}<\frac{2K}{b_{K+1}+b_{K+2}+\cdots+b_{2K}}$$

$$\leqslant\frac{2K}{Kb_K}=\frac{2}{b_K}.$$

由此得 $$\frac{1}{b_1}+\frac{2}{b_1+b_2}+\frac{3}{b_1+b_2+b_3}+\frac{4}{b_1+b_2+b_3+b_4}+\cdots$$

$$<\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_1}+\frac{2}{b_2}+\frac{2}{b_2}+\frac{2}{b_3}+\frac{2}{b_3}+\cdots$$

$$<4\left(\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\frac{1}{b_3}+\cdots\right)$$

所以原不等式成立。

注：原不等式可以加强为

$$\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_1+a_2}+\frac{3}{a_1+a_2+a_3}+\cdots+\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$$

$$<2\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right).$$

七、数学归纳法

含有自然数n的不等式，一般可采用数学归纳法证明。在推导中，仍要注意“放缩”技巧。

例29 （63年武汉市竞赛题）

证明 $|\sin nx|\leqslant n|\sin x|$ （n为自然数）

证明： 当$n=1$时，命题显然成立。

假设$n=K$时命题成立，即$|\sin Kx|\leqslant K|\sin x|$。

则当$n=K+1$时，就有

$$
\begin{aligned}
&|\sin(K+1)x|=|\sin(Kx+x)|\\
&=|\sin Kx\cos x+\cos Kx\sin x|\\
&\leqslant|\sin Kx||\cos x|+|\cos Kx||\sin x|\\
&\leqslant K|\sin x|+|\sin x|=(K+1)|\sin x|.
\end{aligned}
$$

即这时命题亦成立。

综上可知，命题为真。

例30 （88年全国竞赛题）

已知a，b为正实数，且$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$。试证：对每一个$n\in N$，

$$(a+b)^n-a^n-b^n\geqslant 2^{2n}-2^{n+1}.$$

证明： (1)当$n=1$时，左边$=0=$右边，命题成立。

(2) 假设$n=K$时，不等式成立，即有

$$(a+b)^K-a^K-b^K\geqslant 2^{2K}-2^{K+1}.$$

那么，当$n=K+1$时，

$$
\begin{aligned}
\text{左边}&=(a+b)^{K+1}-a^{K+1}-b^{K+1}\\
&=(a+b)[(a+b)^K-a^K-b^K]+a^Kb+ab^K.
\end{aligned}
$$

因 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$，故 $ab=a+b$。

又 $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geqslant 4$，故$ab=a+b\geqslant 4$，

$$a^Kb+ab^K\geqslant 2\sqrt{a^Kb\cdot ab^K}\geqslant 2\cdot 2^{K+1}=2^{K+2}.$$

则 左边$\geqslant 4(2^{2K}-2^{K+1})+2^{K+2}$

$=2^{2K+2}-2^{K+2}=$右边。

由(1)及(2)，对一切$n\in N$，不等式成立。

例31 （第18届全苏中学生数学奥林匹克试题）

沿着圆周写上$n\geqslant 3$个自然数，同时，跟其中任一数相邻的两数之和与该数之比值也是自然数。求证：所有这样的比值之和不大于$3n$。

证明：（1）当$n=3$时，考虑两种情况：

① $a_1=a_2=a_3$，这时$S_3=6<3\cdot 3$。

② a_1，a_2，a_3 不尽相同，不防设 a_1 是最大的，那么 $\frac{a_2+a_3}{a_1}<2$。由于这个数是自然数，所以$a_1=a_2+a_3$。于是

$$S_3=\frac{a_3+a_2}{a_1}+\frac{a_1+a_3}{a_2}+\frac{a_2+a_1}{a_3}$$

$$=3+\frac{2a_3}{a_2}+\frac{2a_2}{a_3}.$$

注意到$K=\frac{2a_3}{a_2}$和$l=\frac{2a_2}{a_3}$是自然数。又知$Kl=4$，所以$K=l=2$，这时$S_3=7<9$；或$K=1$，$l=4$，或$K=4$，$l=1$，这时均有$S_3=8<9$。

由上可知，$n=3$时结论成立。

（2）假设对满足题设条件的$n-1$个数，结论成立。考虑满足题设条件的n个数的情况。

如果n个a_i都相同，那末$S_n=2n<3n$；

如果n个a_i不尽相同，可选其中最大者（如果最大者不止一个，可选至少比它相邻的一边的数大的那个），设为a_i。

由于自然数$\frac{a_{i-1}+a_{i+1}}{a_i}<2$，所以$a_i=a_{i-1}+a_{i+1}$。

于是
$$\frac{a_{i-2}+a_i}{a_{i-1}}=1+\frac{a_{i-2}+a_{i+1}}{a_{i-1}},$$

$$\frac{a_i+a_{i+2}}{a_{i+1}}=1+\frac{a_{i-1}+a_{i+2}}{a_{i+1}}.$$

从而　$\frac{a_{i-2}+a_{i+1}}{a_{i-1}}$和$\frac{a_{i-1}+a_{i+2}}{a_{i+1}}$都是自然数。因此，$a_1$，$a_2$，$a_3$，…，$a_{i-1}$，$a_{i+1}$，…，$a_n$这$n-1$个数满足题设条件。由归纳假设$S_{n-1}<3(n-1)$，其中

$$S_{n-1}=\frac{a_n+a_2}{a_1}+\cdots+\frac{a_{i-2}+a_{i+1}}{a_{i-1}}+\frac{a_{i-1}+a_{i+2}}{a_{i+1}}+\cdots$$
$$+\frac{a_{n-1}+a_1}{a_n}.$$

于是，$S_n=S_{n-1}+3<3(n-1)+3=3n$。

由上述（1）、（2）可知，命题成立。

例32　（64年北京市竞赛题）

已知数列a_1，a_2，…，a_n中所有的项a_i都是正数。又设

对于$n=1$，2，3，…，都有$a_n^2 \leqslant a_n - a_{n+1}$。

证明：对于$n=1$，2，3，…，都有$a_n < \frac{1}{n}$。

证法一．由题设有$0 < a_{n+1} \leqslant a_n(1-a_n)$　　($n=1$，2，3，…)

特别当$n=1$时，由此推得$a_1 < 1$．即所证结论当$n=1$时成立。今设当$n \leqslant k$时求证的结论成立。

若$0 < a_k \leqslant \frac{1}{k+1}$，则$a_{k+1} \leqslant a_k(1-a_k) < a_k \leqslant \frac{1}{k+1}$即为所要结果；

若$\frac{1}{k+1} < a_k < \frac{1}{k}$，则$0 < 1 - a_k < 1 - \frac{1}{k+1} = \frac{k}{k+1}$。

故$a_{k+1} \leqslant a_k(1-a_k) < \frac{1}{k} \cdot \frac{k}{k+1} = \frac{1}{k+1}$。

于是无论在哪种情形都有$a_{k+1} < \frac{1}{k+1}$。

综上可知问题的结论成立。

证法二．(1) 易知$n=1$时结论成立(见证法一)。

(2) 假设$n \leqslant k$时结论成立，则

$$a_{k+1} \leqslant a_k - a_k^2 = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - a_k\right)^2.$$

若$k=1$，则从此容易看出$a_2 < \frac{1}{2}$

若$k \geqslant 2$，则由上式得

$$a_{k+1} \leqslant \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{k}\right)^2 = \frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{k}\right)$$

$$=\frac{k-1}{k^2}\cdot\frac{k+1}{k+1}=\frac{k^2-1}{k^2(k+1)}<\frac{1}{k+1}.$$

由(1)、(2)得知所证结论成立.

八、代换法

中学数学里，常见的三角形中的不等式大多可用代换法进行证明.

设a，b，c是$\triangle ABC$的三边长，通过代换

$$x=\frac{1}{2}(b+c-a),\ y=\frac{1}{2}(c+a-b),\ z=\frac{1}{2}(a+b-c) \quad (1)$$

易得 $$a=y+z,\ b=z+x,\ c=x+y \quad (2)$$

$$p(\text{半周长})=\frac{1}{2}(a+b+c)=x+y+z \quad (3)$$

$$S(\text{面积})=\sqrt{p(p-a.(p-b)(p-c)}$$
$$=\sqrt{(x+y+z)xyz} \quad (4)$$

$$R(\text{外接圆半径})=\frac{abc}{4S}=\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{4\sqrt{(x+y+z)xyz}} \quad (5)$$

$$r(\text{内切圆半径})=\frac{s}{p}=\sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}} \quad (6)$$

借助上述关系式，就能比较简便地证明三角形中的某些不等式.

例33 （第3届国际竞赛题）

已知三角形的三边长a，b，c及其面积S. **求证**：$a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}S$. (7)

证明：由上面关系式(2)和(4)知，只须证明

$$(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2\geqslant 4\sqrt{3(x+y+z)xyz}.$$

即 $(x^2+y^2+z^2)+(xy+yz+zx)$

$$\geqslant 2\sqrt{3(x+y+z)xyz}$$

由已知不等式

$$x^2+y^2+z^2\geqslant xy+yz+zx\geqslant\sqrt{3(x+y+z)xyz}$$

即知所证不等式(7)成立.

注：我们还可证明更一般的不等式

$$a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}S+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2. \quad (8)$$

事实上，只须证明

$$(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2-(x-y)^2-(y-z)^2$$

$$-(z-x)^2\geqslant 4\sqrt{3(x+y+z)xyz}$$

即 $xy+yz+zx\geqslant\sqrt{3(x+y+z)xyz}$,

亦即 $(xy+yz+zx)^2\geqslant 3(x+y+z)xyz$

又即 $(xy-yz)^2+(yz-zx)^2+(zx-xy)^2\geqslant 0.$

最后一个不等式是显然成立的，故(8)式成立.

例34 （第24届国际竞赛题）

设a，b，c是三角形的边长，证明：

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geqslant 0 \quad (9)$$

并说明等号何时成立.

证明：由上面关系式(2)知，只须证明

$$xy^3+yz^3+zx^3\geqslant x^2yz+y^2zx+z^2xy. \quad (10)$$

根据柯西不等式有

$$(\sqrt{xy^3}\sqrt{z^2xy}+\sqrt{yz^3}\sqrt{x^2yz}+\sqrt{zx^3}\sqrt{y^2zx})^2$$

$$\leqslant(xy^3+yz^3+zx^3)(z^2xy+x^2yz+y^2zx)$$

即 $[xyz(x+y+z)]^2\leqslant(xy^3+yz^3+zx^3)$

$$(x+y+z)xyz$$

从而可得(10)，因此不等式(9)成立。

代换法不仅可以用于证明三角形中的不等式，而且还可用于证明其它的不等式。

例35 (83年瑞士数学奥林匹克试题)

设a，b，c为正数，试证：

$abc\geqslant(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$。

证明：若$a\geqslant b+c$，则不等式显然成立。这里假设$a\geqslant b\geqslant c>0$且$a<b+c$。

应用上面关系式(2)，只须证明

$$(x+y)(y+z)(z+x)\geqslant 8xyz.$$

事实上，因为x，y，z均为正数，则有

$x+y\geqslant 2\sqrt{xy}$，$y+z\geqslant 2\sqrt{yz}$，$z+x\geqslant 2\sqrt{zx}$。

三式相乘，便有

$$(x+y)(y+z)(z+x)\geqslant 8xyz.$$

例36 (63年成都市竞赛题)

设a，b，x，y都是实数；并且$a^2+b^2=1$，$x^2+y^2=1$，试证$|ax+by|\leqslant 1$。

证明：依题设作代换

$$\begin{cases}a=\sin\theta_1\\ b=\cos\theta_1\end{cases},\qquad \begin{cases}x=\sin\theta_2\\ y=\cos\theta_2\end{cases}.$$

则 $ax+by=\sin\theta_1\sin\theta_2+\cos\theta_1\cos\theta_2=\cos(\theta_1-\theta_2)$。

但 $|\cos(\theta_1-\theta_2)|\leqslant 1$。

所以 $|ax+by|\leqslant 1$。

九、增量法

在假设条件$a\geqslant b\geqslant c$下，证明一个关于a，b，c的不等式

时，可令$a=c+p$，$b=c+q$（其中$p\geqslant q\geqslant 0$，p，q称为增量），然后进行论证，这种证明方法称为增量法或松弛法，它在证明不等式，特别是对称不等式时是常用的，它实质上是一种特殊的变量代换法。

例37 （第6届国际竞赛题）

设a，b，c是一个三角形的三边长，求证

$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\leqslant 3abc$.

证明：要证不等式关于a，b，c对称，不妨设$a\geqslant b\geqslant c>0$。再作变量代换：

$$a=c+p,\ b=c+q\qquad (p\geqslant q\geqslant 0)$$

则 $3abc-a^2(b+c-a)-b^2(a+c-b)-c^2(a+b-c)$

$=a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b)$

$=(c+p)(p-q)p+(c+q)q(q-p)+cpq$

$=[c(p-q)+(p^2-q^2)](p-q)+cpq\geqslant 0$

故所证不等式成立。

例38 （第25届国际竞赛题）

设x，y，z为非负实数，且$x+y+z=1$，证明：

$$0\leqslant yz+zx+xy-\frac{7}{27}.$$

证明：不妨设$x\geqslant y\geqslant z\geqslant 0$。

由$x+y+z=1$，不难得到$z\leqslant\frac{1}{3}$，$x+y\geqslant\frac{2}{3}$。

于是 $2xyz\leqslant\frac{2}{3}xy\leqslant xy$。

所以 $0\leqslant yz+zx+xy-2xyz$。

为证明右边不等式，令$x+y=\frac{2}{3}+p$，$z=\frac{1}{3}-p$，$0\leqslant p\leqslant\frac{1}{3}$。于是有

$$yz+zx+xy-2xyz=z(x+y)+xy(1-2z)$$

$$=\left(\frac{1}{3}-p\right)\left(\frac{2}{3}+p\right)+xy\left(\frac{1}{3}+2p\right)$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{3}-p\right)\left(\frac{2}{3}+p\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{p}{2}\right)^2\left(\frac{1}{3}+2p\right)$$

$$=\frac{7}{27}-\frac{1}{4}p^2+\frac{1}{2}p^3=\frac{7}{27}-\frac{p^2}{2}\left(\frac{1}{2}-p\right)\leqslant\frac{7}{27}.$$

因而所证不等式成立。

十、函数法

利用函数性质来证明不等式，也是一种基本方法。它的内容很广泛。这里，略举几例说明。

例39 （第19届国际竞赛题）

设a，b，A，B都是已知实数，现在考虑一个函数

$f(x)=1-a\cos x-b\sin x-A\cos 2x-B\sin 2x$.

试证：如果对于任何一个实数x，有$f(x)\geqslant 0$，则$a^2+b^2\leqslant 2$，而$A^2+B^2\leqslant 1$.

证明：$f(x)=1-\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\theta)-\sqrt{A^2+B^2}\cos 2(x-\varphi)$.

(1) 假若$\sqrt{a^2+b^2}>\sqrt{2}$，取x使得$\cos(x-\theta)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

即

$$x=\theta+2k\pi\pm\frac{\pi}{4}\qquad(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$$

这时，$\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\theta)>1$。

则 $\cos2(x-\varphi)=\cos\left(4k\pi+2\theta-2\varphi\pm\frac{\pi}{2}\right)$

$$=\cos\left(2\theta-2\varphi\pm\frac{\pi}{2}\right).$$

若 $\cos\left(2\theta-2\varphi+\frac{\pi}{2}\right)\leqslant0$，则$\cos\left(2\theta-2\varphi-\frac{\pi}{2}\right)\geqslant0$。

即 $\sqrt{A^2+B^2}\cos2(x-\varphi)$有正值；

若 $\cos\left(2\theta-2\varphi+\frac{\pi}{2}\right)\geqslant0$，则$\sqrt{A^2+B^2}\cos2(x-\varphi)$仍有正值。

故$f(x)<0$，与题设矛盾。因而$a^2+b^2\leqslant2$。

（2）假设$\sqrt{A^2+B^2}>1$，取x使得$\cos2(x-\varphi)=1$，即

$$x=\frac{k\pi}{2}+\varphi\qquad(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$$

这时 $\sqrt{A^2+B^2}\cos2(x-\varphi)>1$，

则 $\cos(x-\theta)=\cos\left(\frac{k\pi}{2}+\varphi-\theta\right)$。

如果$\varphi-\theta$是第Ⅱ、Ⅲ象限的角，取$k=2$或1，则$\frac{k\pi}{2}+\varphi-\theta$是第Ⅳ象限的角。

$\cos(x-\theta)=\cos\left(\frac{k\pi}{2}+\varphi-\theta\right)\geqslant 0$，则$\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\theta)$总有正值。

故$f(x)<0$，与题设矛盾，因而$A^2+B^2\leqslant 1$。

另证：由熟知的三角方法，可取α、β使

$f(x)=1-\sqrt{a^2+b^2}\cos(x+\alpha)-\sqrt{A^2+B^2}\cos 2(x+\beta)$.

分别取$x=-\alpha+\frac{\pi}{4}$及$-\alpha-\frac{\pi}{4}$，由题设有

$$f\left(-\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=1-\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}-\sqrt{A^2+B^2}$$

$$\cos 2\left(\beta-\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\geqslant 0,$$

$$f\left(-\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=1-\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}-\sqrt{A^2+B^2}$$

$$\cos 2\left(\beta-\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\geqslant 0.$$

因 $\cos 2\left(\beta-\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos 2\left(\beta-\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$,

则二者总有一个不小于0，因而

$$1-\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geqslant 0,\ 即\quad a^2+b^2\leqslant 2.$$

同样，考虑$f(-\beta+\pi)$及$f(-\beta)$，可类似地证得$A^2+B^2\leqslant 1$。

例40 （83年瑞士竞赛题）

设 $0\leqslant a\leqslant 1$，$0\leqslant x\leqslant \pi$，证明

$$(2a-1)\sin x+(1-a)\sin(1-a)x\geqslant 0.$$

证明：首先注意到$a=0$，1及$x=0$，π时，不等式显然成立．故只须就$0<a<1$及$0<x<\pi$讨论．

将要证的不等式改写成

$$(1-a)\sin(1-a)x\geqslant(1-2a)\sin x.$$

显然，这个不等式难以直接化简证明，而采取"加强命题"的手法：

因为 $(1-2a)\sin x\leqslant(1-2a+a^2)\sin x=(1-a)^2\sin x$，

所以 若能证明

$$(1-a)^2\sin x\leqslant(1-a)\sin(1-a)x$$

就得到要证的不等式．

事实上，上面一个不等式等价于

$$\sin(1-a)x\geqslant(1-a)\sin x.$$

又等价于 $\dfrac{\sin(1-a)x}{(1-a)x}\geqslant\dfrac{\sin x}{x}$.

由于$(1-a)x<x$，因而问题又转化为证明函数$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$在$(0,\pi)$内是减函数即可．

因为 $f_1(x)=\sin x$，$f_2(x)=x$在$\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$内分别为减函数与增函数，所以$f(x)=\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$在$\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$内是减函数；又不难证明$f(x)$在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$内是减函数．因此，$f(x)$在$(0,\pi)$内是减函数．

注：为证一个很复杂的不等式$A\leqslant B$，若用某种方法能断定$A\leqslant C$，则可尝试去证$C\leqslant B$（如形式上它要比$A\leqslant B$简单）。如果能达到目的，则便证得$A\leqslant B$，这就是所谓"加强命题"的手法。当然，$C\leqslant B$也可能不成立，那就只好另想法去证$A\leqslant B$。

用函数方法证不等式及讨论函数的增减性，还可利用求导数这一重要方法。

例41 （第12届全俄中学生数学竞赛题）

设a，b为不同的正数，证明：不等式

$$\sqrt{ab}<\frac{a-b}{\ln a-\ln b}<\frac{a+b}{2}$$

成立。

证明：不失一般性，设$0<b<a$。

令$x=\frac{a}{b}$，则所证不等式等价于

$$\frac{2(x-1)}{x+1}<\ln x<\frac{x-1}{\sqrt{x}}.$$

考虑函数$f(x)=\ln x-\dfrac{2(x-1)}{x+1}$.

当$x>1$时，$f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{2(x+1)-2(x-1)}{(x+1)^2}=\dfrac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}$

>0，所以 $\ln x-\dfrac{2(x-1)}{x+1}>0 \quad (x>1)$.

类似地可证：$\ln x<\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$.

综上可知原不等式成立。

第　七　讲

重要不等式在数学竞赛中的应用

排序不等式、平均不等式、柯西不等式等，是我们常说的重要不等式。在国内外的数学竞赛中，经常出现应用它们来解答的试题。

一、排序不等式

定理1（排序不等式）

设有数组A：$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$；数组$B$：$b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$，则

$$\begin{aligned}a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n&\geqslant s=a_1b_{j_1}+a_2b_{j_2}+\cdots+a_nb_{j_n}\\&\geqslant a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1.\end{aligned}$$

其中j_1，j_2，…，j_n是1，2，…，n的一个排列。等号当$a_1=a_2=\cdots=a_n$或$b_1=b_2=\cdots=b_n$时成立。

注： 定理1表明数组A与B之数一对一对相乘后再相加，同序数最大，倒序数最小。

证明： 先证不等式

$$s=a_1b_{j_1}+a_2b_{j_2}+\cdots+a_nb_{j_n}\leqslant a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n.$$

这个不等式的意义是：当$j_1=1$，$j_2=2$，…，$j_n=n$时，和s达最大值$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$。因此，我们首先证明$a_n$必须与$b_n$搭配才能使$s$达最大值，否则，设$j_n\neq n$，且$b_n$是和

某个$a_k(k\neq n)$搭配的，这时必有

$$a_k b_n + a_n b_{j_n} \leqslant a_k b_{j_n} + a_n b_n \qquad (*)$$

事实上，$a_n b_n + a_k b_{j_n} - a_k b_n - a_n b_{j_n}$

$$= b_n(a_n - a_k) - b_{j_n}(a_n - a_k)$$

$$= (b_n - b_{j_n})(a_n - a_k) \geqslant 0.$$

不等式（*）告诉我们，当$j_n \neq n$时，调换

$$s = a_1 b_{j_1} + a_2 b_{j_2} + \cdots + a_k b_{j_k} + \cdots + a_n b_{j_n}$$

中b_n和b_{j_n}的位置（其余$n-2$项不变），会使和s增加。

同理，调整好a_n与b_n后，再调整a_{n-1}与b_{n-1}又会使s增加。如此进行，至多经n次调整后就得最大值：$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$。这就证得了不等式：$s = a_1 b_{j_1} + a_2 b_{j_2} + \cdots + a_n b_{j_n} \leqslant a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$。

显然，当$a_1 = a_2 = \cdots = a_n$或$b_1 = b_2 = \cdots = b_n$时，上面的不等式中的等号成立。如果A中的数与B中的数都不全相等，则必存在j_n与k使$b_n > b_{j_n}$，$a_n > a_k$。这时（*）式不等号成立。因而所证不等式对排列j_1，j_2，$\cdots$，$j_n(j_k = n)$也相应成立不等号。

同样，可用类似方法证明不等式

$$a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1 \leqslant s = a_1 b_{j_1} + a_2 b_{j_2} + \cdots + a_n b_{j_n}.$$

综上可知排序不等式成立。

下面，我们再从两方面加以推广。

定理2　设有两组正数

A：$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$；　　　B：$b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$

则将A与B中的数一对一对的作幂$a_i^{b_j}$后再相乘，同序数最大，倒序数最小。即

$a_1^{b_1}a_2^{b_2}\cdots a_n^{b_n}$最大，$a_1^{b_n}a_2^{b_{n-1}}\cdots a_d^{b_1}$最小。

证明： 不妨设诸a_i按序排列，诸b_i从第m个因数后按序排列。即

$a_1^{b_{i1}}a_2^{b_{i2}}\cdots a_k^{b_m}\cdots a_m^{b_j}a_{m+1}^{b_{m+1}}\cdots a_n^{b_n}$。

由$b_m \geqslant b_j$，$a_m \geqslant a_k$，可得

$$\frac{a_m^{b_m}a_k^{b_j}}{a_m^{b_j}a_k^{b_m}}=\left(\frac{a_m}{a_k}\right)^{b_m-b_j}\geqslant 1,$$

于是，$a_m^{b_m}a_k^{b_j}\geqslant a_m^{b_j}a_k^{b_m}$。

这就是说，把b_m与b_j交换后积不减少，经有限次交换后可得$a_1^{b_1}a_2^{b_2}\cdots a_n^{b_n}$。又因每次交换积不减少，所以$a_1^{b_1}a_2^{b_2}\cdots a_n^{b_n}$最大。

同理可证 $a_1^{b_n}a_2^{b_{n-1}}\cdots a_n^{b_1}$最小。

定理3 设有m排非负数

$a_{k1}\leqslant a_{k2}\leqslant\cdots\leqslant a_{kn}$ $\qquad$ ($k=1, 2, \cdots m$)

从每排中取出一数相乘，再从剩下的数中每排取出一数相乘，……， 直到n次取完为止，然后相加，所得诸和中以

$a_{11}a_{21}\cdots a_{m1}+a_{12}a_{22}\cdots a_{m2}+\cdots+a_{1n}a_{2n}\cdots a_{mn}$为最大。

证明： 考虑两项

$a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{mi_m}$与$a_{1j_1}\ a_{2j_2}\cdots a_{mj_m}$

不妨设 $a_{1i_1}\leqslant a_{1j_1}$，$a_{2i_2}\leqslant a_{2j_2}$，…，$a_{ki_k}\leqslant a_{kj_k}$

$a_{k+1\,i_{k+1}}\geqslant a_{k+1\,j_{k+1}}$，…，$a_{mi_m}\geqslant a_{mj_m}$

于是 $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ki_k}\leqslant a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{kj_k}$

$$a_{k+1\,i_{k+1}}\cdots a_{mi_m}\geqslant a_{k+1\,j_{k+1}}\cdots a_{mj_m}$$

由排序不等式（定理 1 ）有

$$a_{1j_1}a_{2i_2}\cdots a_{ki_k}a_{k+1\,j_{k+1}}\cdots a_{mj_m}+a_{1i_1}a_{2j_2}\cdots a_{kj_k}$$

$$a_{k+1\,i_{k+1}}\cdots a_{mi_m}\geqslant a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{mi_m}+a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{mj_m}.$$

即在此两项中把倒序改为同序后和不减少。经有限次改变后必可使n项中任两项均无倒序，此和变为

$$a_{11}a_{21}\cdots a_{m1}+a_{12}a_{22}\cdots a_{m2}+\cdots+a_{1n}a_{2n}\cdots a_{mn}$$

因若不然，则必还有两项倒序存在．又每次改变和不减少，所以

$$a_{11}a_{21}\cdots a_{m1}+a_{12}a_{22}\cdots a_{m2}+\cdots+a_{1n}a_{2n}\cdots a_{mn}$$

为最大。

利用排序不等式，不仅可以推出许多著名的不等式（如后面所述的平均不等式等），而且还可解决数学竞赛中的有关试题。

例1 （78年全国竞赛题）

设有十人各拿提桶一只同到水龙头前打水，设水龙头注满第i($i=1, 2, 3, \cdots, 10$)个人的提桶需时T_i分钟，假定这些T_i各不相同，问：

(1) 当只有一个水龙头可用时，应如何安排这十个人的次序，使他们的总的花费时间（包括各人自己接水所花的时间）为最小？这时间等于多少？（须证明你的论断）

(2) 当有两个水龙头可用时，应如何安排这十个人的次

序，使他们的总的花费时间为最少？这时间等于多少？（须证明你的论断）

解：(1)我们不妨假定$T_1<T_2<T_3<\cdots<T_{10}$。又因$10>9>8>\cdots>1$，所以由定理1（排序不等式）有

$$10T_{i_1}+9T_{i_2}+\cdots+T_{i_{10}}\geqslant 10T_1+9T_2+\cdots+T_{10}.$$

这就是说，按水桶的大小从小到大依次接水，所需总时间最少，这个最小总时间为

$$10T_1+9T_2+8T_3+\cdots+T_{10}.$$

(2) 当有Ⅰ、Ⅱ两个水龙头可用时，

假设分配$5+l(0\leqslant l<5)$个到Ⅰ，任意安排次序是i_1，i_2，$\cdots$，i_{5+l}，这时总的花费时间为

$$T_{\text{I}}=T_{i_1}+(T_{i_1}+T_{i_2})+\cdots+(T_{i_1}+T_{i_2}+\cdots+T_{i_{5+l}}).$$

分配另外的$5-l$个到Ⅱ，任意安排次序是j_1，j_2，$\cdots$，j_{5-l}，这时总的花费时间为

$$T_{\text{II}}=T_{j_1}+(T_{j_1}+T_{j_2})+\cdots+(T_{j_1}+T_{j_2}+\cdots+T_{j_{5-l}})$$

于是有

$$T_{\text{I}}+T_{\text{II}}=T_{i_1}+(T_{i_1}+T_{i_2})+\cdots+(T_{i_1}+T_{i_2}+\cdots+T_{i_{5+l}})+T_{j_1}+(T_{j_1}+T_{j_2})+\cdots+(T_{j_1}+T_{j_2}+\cdots+T_{j_{5-l}})$$

$$=(T_{i_1}+\cdots+T_{i_{5+l}}+T_{j_1}+\cdots+T_{j_{5-l}})+$$

$$\cdots + (T_{i_1} + \cdots + T_{i_{2+i}} + T_{i_1}) + (T_{i_1} + \cdots$$

$$+ T_{i_{2i}}) + (T_{i_1} + \cdots + T_{i_{2i-1}}) + (T_{i_1} + \cdots$$

$$T_{i_{2i-2}}) + \cdots + T_{i_1}$$

$$> (T_{i_1} + \cdots + T_{i_{5+i}} + T_{i_1} + \cdots + T_{i_{5-i}}) +$$

$$+ \cdots + (T_{i_1} + \cdots + T_{i_{2+i}} + T_{i_1}) + (T_{i_1} + \cdots$$

$$+ T_{i_2}) + (T_{i_1} + \cdots + T_{i_{2i-2}}) + \cdots +$$

$$(T_{i_1} + T_{i_2}) > (T_1 + \cdots + T_{10}) + (T_1 + \cdots + T_8)$$

$$+ \cdots + (T_1 + T_2)$$

即$T_{\text{I}} + T_{\text{II}} > 5(T_1 + T_2) + 4(T_3 + T_4) + 3(T_5 + T_6) + 2(T_7 + T_8) + (T_9 + T_{10})$。

由此可见，每个水龙头各分配5个，并按从小到大次序轮流分配到Ⅰ、Ⅱ两个水龙头上去时总的花费时间最少。

如$\begin{cases} \text{I}: T_1, T_3, T_5, T_7, T_9 \\ \text{II}: T_2, T_4, T_6, T_8, T_{10} \end{cases}$

并且其中相同列的两个可以互换。

例2 （匈牙利竞赛题）

设b_1，b_2，…，b_n是正数a_1，a_2，…，a_n的一个排列。证明：$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n} \geqslant n$。

证明：不妨设　$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n > 0$，

于是　　$\frac{1}{a_1} \leqslant \frac{1}{a_2} \leqslant \cdots \leqslant \frac{1}{a_n}$。

再注意到 $\frac{1}{b_1}$，$\frac{1}{b_2}$，…，$\frac{1}{b_n}$是$\frac{1}{a_1}$，$\frac{1}{a_2}$，…，$\frac{1}{a_n}$的一个排列，由定理 1 得

$$n=a_1\cdot\frac{1}{a_1}+a_2\cdot\frac{1}{a_2}+\cdots+a_n\cdot\frac{1}{a_n}$$

$$\leqslant a_1\cdot\frac{1}{b_1}+a_2\cdot\frac{1}{b_2}+\cdots+a_n\cdot\frac{1}{b_n}$$

即 $\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n}{b_n}\geqslant n$。

例3 （第20届国际数学竞赛题）

已知a_1，a_2，…，a_k，…为两两各不相同的正整数，求证对任何正整数n，下列不等式成立：

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\leqslant a_1+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_n}{n^2}.$$

证明：设b_1，b_2，…，b_n是a_1，a_2，…，a_n的一个排列，且满足$b_1<b_2<\cdots<b_n$。因b_1，b_2，…，b_n都是自然数，故$b_1\geqslant1$，$b_2\geqslant2$，…，$b_n\geqslant n$。又因$1>\frac{1}{2^2}>\cdots>\frac{1}{n^2}$，则由排序不等式得

$$a_1+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_n}{n^2}\geqslant b_1+\frac{b_2}{2^2}+\cdots+\frac{b_n}{n^2}$$

$$\geqslant 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

即 $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\leqslant a_1+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_n}{n^2}$。

注：本例在第一讲第一段中，曾用数学归纳法证明过，两种证法加以比较，易于看出排序不等式的作用.

例 4 （78年上海市竞赛题）

若a，b，c为正数，求证：

$a^{2a}b^{2b}c^{2c} \geqslant a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}$.

证明：不妨设$a \geqslant b \geqslant c > 0$，则

$$\lg a \geqslant \lg b \geqslant \lg c.$$

故由排序不等式，得

$a\lg a + b\lg b + c\lg c \geqslant b\lg a + c\lg b + a\lg c$,

$a\lg a + b\lg b + c\lg c \geqslant c\lg a + a\lg b + b\lg c$.

所以，$2a\lg a + 2b\lg b + 2c\lg c$

$$\geqslant (b+c)\lg a + (c+a)\lg b + (a+b)\lg c,$$

即 $\lg(a^{2a} \cdot b^{2b} \cdot c^{2c}) \geqslant \lg(a^{b+c} \cdot b^{c+a} \cdot c^{a+b})$,

从而，$a^{2a} \cdot b^{2b} \cdot c^{2c} \geqslant a^{b+c} \cdot b^{c+a} \cdot c^{a+b}$.

例 5 （74年美国第三届中学生竞赛题）

设a，b，c是正整数，求证：

$a^a b^b c^c \geqslant (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$.

证明：不妨设$a \geqslant b \geqslant c > 0$，则

$$\lg a \geqslant \lg b \geqslant \lg c.$$

由排序不等式，得

$a\lg a + b\lg b + c\lg c = a\lg a + b\lg b + c\lg c$,

$a\lg a + b\lg b + c\lg c \geqslant b\lg a + c\lg b + a\lg c$,

$a\lg a + b\lg b + c\lg c \geqslant c\lg a + a\lg b + b\lg c$.

相加，得

$3(a\lg a + b\lg b + c\lg c) \geqslant (a+b+c)(\lg a + \lg b + \lg c)$,

即$\lg(a^a b^b c^c) \geqslant \frac{a+b+c}{3}\lg(abc)$，

所以 $a^a b^b c^c \geqslant (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$.

另证：不妨设$a \geqslant b \geqslant c > 0$，则由定理 2 有

$a^a b^b \geqslant a^b b^a$，$b^b c^c \geqslant b^c c^b$，$c^c a^a \geqslant c^a a^c$，

从而$(a^a b^b)(b^b c^c)(c^c a^a) \geqslant (a^b b^a)(b^c c^b)(c^a a^c)$.

两边同乘以$a^a b^b c^c$，则有$a^{3a} b^{3b} c^{3c} \geqslant (abc)^{a+b+c}$.

显然，其立方根就是所要求的结果.

例 6 （第 6 届国际竞赛题）

设a，b，c为某一三角形三条边的长. 求证：

$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \leqslant 3abc$.

证明：不妨设$a \geqslant b \geqslant c$。

因为 $b(c+a-b)-a(b+c-a)=(a-b)(a+b-c) \geqslant 0$,

$c(a+b-c)-b(c+a-b)=(b-c)(b+c-a) \geqslant 0$,

所以 $a(b+c-a) \leqslant b(c+a-b) \leqslant c(a+b-c)$.

又因 $a \geqslant b \geqslant c$,

故由排序不等式，得

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)$$

$$\leqslant ab(b+c-a)+bc(c+a-b)+ca(a+b-c)$$

$$=3abc+ab(b-a)+bc(c-b)+ca(a-c) \qquad (1)$$

又 $a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)$

$$\leqslant ac(b+c-a)+ab(c+a-b)+bc(a+b-c)$$

$$=3abc+ac(c-a)+ab(a-b)+bc(b-c) \qquad (2)$$

(1)+(2)得

$$2[a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)] \leqslant 6abc.$$

即 $a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\leqslant 3abc$。

例 7 （83年瑞士奥林匹克数学竞赛试题）

设a，b，c为正数，试证：

$$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)\leqslant abc。$$

证明：由例 6 有

$$\frac{1}{3}\left[a^2(b+c-b)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\right]\leqslant abc。$$

又 $$\frac{1}{3}\left[a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\right]$$

$$\geqslant\sqrt[3]{(abc)^2(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}，$$

则 $$\sqrt[3]{(abc)^2(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}\leqslant abc$$

将上式两边三次乘方，得

$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)\leqslant abc$。

例 8 （第24届国际竞赛题）

设a，b，c是三角形的边长．证明：

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geqslant 0。$$

证明：不妨设$a\geqslant b\geqslant c$。由例 6 的证明知

$$a(b+c-a)\leqslant b(c+a-b)\leqslant c(a+b-c)。$$

又知 $$\frac{1}{a}\leqslant\frac{1}{b}\leqslant\frac{1}{c}，$$

故由排序不等式得

$$\frac{a}{c}(b+c-a)+\frac{b}{a}(c+a-b)+\frac{c}{b}(a+b-c)$$

$$\leqslant\frac{a}{a}(b+c-a)+\frac{b}{b}(c+a-b)+\frac{c}{c}(a+b-c)$$

$$=a+b+c。$$

所以，$a^2b(b+c-a)+b^2c(c+a-b)+c^2a(a+b-c)$

$$\leqslant a^2bc+b^2ca+c^2ab.$$

移项即得

$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geqslant 0.$

例 9 （第17届国际竞赛题）

设 $x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n$，$y_1\leqslant y_2\leqslant\cdots\leqslant y_n$，

又 z_1，z_2，…，z_n是y_1，y_2，…，y_n的一个排列。

求证： $\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2$。

证明： 由排序不等式得

$$\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\geqslant\sum_{i=1}^{n}x_iz_i,$$

即 $$-\sum_{i=1}^{n}2x_iy_i\leqslant-\sum_{i=1}^{n}2x_iz_i.$$

但 $$\sum_{i=1}^{n}(x_i^2+y_i^2)=\sum_{i=1}^{n}(x_i^2+z_i^2),$$

所以 $$\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-2x_iy_i+y_i^2)$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-2x_iz_i+z_i^2),$$

即 $$\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2.$$

二、平均不等式

定理 4 （平均不等式）

设a_1，a_2，…，a_n是n个正数，则

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}. \tag{1}$$

即是，n个正数的算术平均值（简记为$A(a)$）必不小于它们的几何平均值（简记为$G(a)$）：

$$A(a)\geqslant G(a).$$

等号当且仅当$a_1=a_2=\cdots=a_n$时成立。

证法一：记$c=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$，令$b_1=\frac{a_1}{c}$，$b_2=\frac{a_2}{c}$，…，$b_n=\frac{a_n}{c}$，则$b_1b_2\cdots b_n=1(b_i>0)$且不等式(1)等价于不等式

$$b_1+b_2+\cdots+b_n\geqslant n \tag{2}$$

下面证明这个不等式。

任取正数x_1，再取正数x_2使得$b_1=\frac{x_1}{x_2}$，再取x_3使得$b_2=\frac{x_2}{x_3}$，…，最后取x_n使得$b_{n-1}=\frac{x_{n-1}}{x_n}$，所以

$$b_n=\frac{1}{b_1b_2\cdots b_{n-1}}=\frac{1}{\frac{x_1}{x_2}\cdot\frac{x_2}{x_3}\cdots\frac{x_{n-1}}{x_n}}=\frac{x_n}{x_1}$$

再由例2的不等式有

$$b_1+b_2+\cdots+b_n=\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\cdots+\frac{x_n}{x_1}\geqslant n.$$

又从例2的证明可见，这个不等式当且仅当$x_1=x_2=\cdots=x_n$时等号成立。从而当且仅当$b_1=b_2=\cdots=b_n$时不等式(2)

等号成立，所以当且仅当$a_1=a_2=\cdots=a_n$时不等式(1)成立等号。

证法二：先证引理

若$A>0$，$B>0$，$n\in N$，则$nA+B\geqslant(n+1)\sqrt[n+1]{A^nB}$.

事实上，可设$A=a^{n+1}$，$B=b^{n+1}$　　$(a>0,\ b>0)$.

则　$nA+B-(n+1)\sqrt[n+1]{A^nB}$

$=na^{n+1}+b^{n+1}-(n+1)a^nb$

$=na^{n+1}-na^nb-a^nb+b^{n+1}$

$=na^n(a-b)-b(a^n-b^n)$

$=(a-b)[na^n-b(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})]$

$=(a-b)[(a^n-a^{n-1}b)+(a^n-a^{n-2}b^2)+\cdots+(a^n-ab^{n-1})+(a^n-b^n)]$

$=(a-b)[a^{n-1}(a-b)+a^{n-2}(a^2-b^2)+\cdots+a(a^{n-1}-b^{n-1})+(a^n-b^n)]=(a-b)[a^{n-1}(a-b)+a^{n-2}(a-b)(a+b)+\cdots+a(a-b)(a^{n-2}+a^{n-3}b+\cdots+ab^{n-3}+b^{n-2})+(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})]$

$=(a-b)^2[a^{n-1}+a^{n-2}(a+b)+\cdots+a(a^{n-2}+a^{n-3}b+\cdots+ab^{n-3}+b^{n-2})+(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})]$

当$a=b$时，$nA+B-(n+1)\sqrt[n+1]{A^nB}=0$；

当$a\neq b$时，$nA+B-(n+1)\sqrt[n+1]{A^nB}>0$.

则 $nA+B\geqslant(n+1)\sqrt[n+1]{A^nB}$，当且仅当$A=B$时，取等号。

下面，借助引理证明定理4.

事实上，当$n=1$时，$a_1=a_1$，不等式(1)成立。

假设$n=k(k\in N)$时，不等式(1)成立。

即　$a_1+a_2+\cdots+a_k\geqslant k\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}$.

当$n=k+1$时，有

$$
\begin{aligned}
&a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}\\
\geqslant&k\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}+a_{k+1}\\
\geqslant&(k+1)\sqrt[k+1]{(\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k})^k\cdot a_{k+1}} \qquad \text{(引理)}\\
=&(k+1)\sqrt[k+1]{a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}}
\end{aligned}
$$

综上可知，原不等式(1)对任意自然数n都成立，且当各数都相等时取等号.

例10 （第16届全苏数学竞赛题）

设$x>0$，证明：$2^{\sqrt[4]{x}}+2^{\sqrt[12]{x}}\geqslant2\cdot2^{\sqrt[6]{x}}$.

证明：仔细观察所证不等式，易于想到借助平均不等式求解. 由$G(a)\leqslant A(a)$得

$$2^{\sqrt[4]{x}}+2^{\sqrt[12]{x}}\geqslant2\sqrt{2^{\sqrt[4]{x}}\cdot2^{\sqrt[12]{x}}}=2\cdot2^{\frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt[12]{x}}{2}}$$

又 $$\frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt[12]{x}}{2}\geqslant\left(x^{\frac{1}{12}}x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{1}{6}}$$

由上面两个不等式及指数函数2^x的递增性，即得要证的不等式：$2^{\sqrt[4]{x}}+2^{\sqrt[12]{x}}\geqslant2\cdot2^{\sqrt{x}}$.

例11 （84年全国竞赛题）

设x_1，x_2，…，x_n都是正数，证明

$$\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}+\frac{x_n^2}{x_1}\geqslant x_1+x_2+\cdots+x_n.$$

证明：根据$G(a)\leqslant A(a)$有

$$\frac{x_1^2}{x_2}+x_2\geqslant2x_1,\qquad\frac{x_2^2}{x_3}+x_3\geqslant2x_2,$$

$$\frac{x_3^2}{x_4}+x_4\geqslant 2x_3,\ \cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{x_{n-1}^2}{x_n}+x_n\geqslant 2x_{n-1},\ \frac{x_n^2}{x_1}+x_1\geqslant 2x_n.$$

将以上诸式相加，即得所证不等式：

$$\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}+\frac{x_n^2}{x_1}\geqslant x_1+x_2+\cdots+x_n.$$

例12 （第11届国际竞赛题）

试证对$x_1>0$，$x_2>0$，$x_1y_1-z_1^2>0$，$x_2y_2-z_2^2>0$的所有实数x_1，x_2，y_1，y_2，z_1，z_2，有不等式

$$\frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2}\leqslant\frac{1}{x_1y_1-z_1^2}+\frac{1}{x_2y_2-z_2^2}.$$

并求出等号成立的必要与充分条件。

证明： 令$a=x_1y_1-z_1^2>0$，$b=x_2y_2-z_2^2>0$

则　$x_1y_1=a+z_1^2$，$x_2y_2=b+z_2^2$。

于是　$(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2$

$$=a+b+x_1y_2+x_2y_1-2z_1z_2$$

$$=a+b+\frac{x_1}{x_2}x_2y_2+\frac{x_2}{x_1}x_1y_1-2z_1z_2$$

$$=a+b+\frac{x_1}{x_2}(b+z_2)^2+\frac{x_2}{x_1}(a+z_1)^2-2z_1z_2$$

$$=a+b+\left(\frac{x_1}{x_2}b+\frac{x_2}{x_1}a-2\sqrt{ab}\right)+2\sqrt{ab}$$

$$+\left(\frac{x_1}{x_2}z_2^2+\frac{x_2}{x_1}z_1^2-2z_1z_2\right)$$

$$=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2+\left(\sqrt{\frac{x_1}{x_2}b}-\sqrt{\frac{x_2}{x_1}a}\right)^2$$

$$+\left(\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}\,z_2-\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}z_1\right)^2\geqslant(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2.$$

则 $$\frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2}\leqslant\frac{8}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}. \tag{1}$$

又原不等式右边即是$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$，这样，只要能证明

$$\frac{8}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}\leqslant\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \tag{2}$$

就可以了。

由平均不等式有$\sqrt{a}+\sqrt{b}\geqslant2\sqrt[4]{ab}$及$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant\frac{2}{\sqrt{ab}}$,

所以 $$\frac{8}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}\leqslant\frac{2}{\sqrt{ab}}\leqslant\frac{1}{a}+\frac{1}{b}.$$

至此，原不等式得证。

显然，(1)式成立等号的充要条件是

$$\begin{cases}\sqrt{\frac{x_1}{x_2}b}=\sqrt{\frac{x_2}{x_1}a}\\[2mm] \sqrt{\frac{x_1}{x_2}}z_2=\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}z_1\end{cases}$$

即 $$\begin{cases}x_1\sqrt{b}=x_2\sqrt{a}\\ x_1z_2=x_2z_1\end{cases}$$

(2) 式成立等号的充要条件是$a=b$。

综上可知原不等式成立等号的充要条件是

$x_1=x_2$, $y_1=y_2$, $z_1=z_2$.

例13 （第3届国际竞赛题）

已知三角形的边长a，b，c及其面积S.求证

$$a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}S,$$

并指出等式何时成立.

证明：若将所证不等式变形为$\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4S}\geqslant\sqrt{3}$，则可把问题视为求$\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4S}$的极小值. 于是由$S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=2R^2\sin A\sin B\sin C$，$a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$，则可把问题转化为求三角函数的极值.

由平均不等式有

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{4S}=\frac{\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C}{2\sin A\sin B\sin C}$$

$$\geqslant\frac{3\sqrt[3]{\sin^2 A\sin^2 B\sin^2 C}}{2\sin A\sin B\sin C}$$

$$=\frac{3}{2\sqrt[3]{\sin A\sin B\sin C}}$$

令$y=\sin A\sin B\sin C$,

则 $y=\dfrac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos(A+B)]\sin C$

$$\leqslant\frac{1}{2}(1+\cos C)\sin C,$$

故$y^2\leqslant\frac{1}{4}(1+\cos C)^2\sin^2 C=\frac{1}{4}(1+\cos C)^2(1-\cos^2 C)$

$$=\frac{1}{4}(1+\cos C)^3(1-\cos C)$$

$$=\frac{1}{12}(1+\cos C)^3(3-3\cos C)$$

$$\leqslant\frac{1}{12}\left(\frac{3(1+\cos C)+(3-3\cos C)}{4}\right)^4$$

$$=\frac{1}{12}\left(\frac{3}{2}\right)^4$$

于是 $y\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

从而$\frac{a^2+b^2+c^2}{4S}\geqslant\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{\sin A\sin B\sin C}}$

$$\geqslant\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3}}{8}}}=\sqrt{3}$$

即 $\frac{a^2+b^2+c^2}{4S}\geqslant\sqrt{3}$.

显然，等式成立的条件是

$$\begin{cases}\cos(A-B)=1\\1+\cos C=3-3\cos C\end{cases}$$

即 $A=B=C=\frac{\pi}{3}$.

例14 （第25届国际竞赛题）

设x，y，z是非负实数，且$x+y+z=1$。

求证：$0\leqslant yz+zx+xy-2xyz\leqslant\frac{7}{27}$。

证明：要证的不等式关于x，y，z对称，不妨设$x\geqslant y\geqslant z\geqslant 0$。于是$1=x+y+z\geqslant 3z$，即$z\leqslant\frac{1}{3}$。

从而 $\quad 2xyz\leqslant\frac{2}{3}xy\leqslant xy$，

于是 $\quad yz+zx+xy-2xyz\geqslant 0$。

下面证明右边不等式。

在前述假定下，$z\leqslant\frac{1}{3}$，$x+y\geqslant\frac{2}{3}$。

令 $\quad x+y=\frac{2}{3}+\delta$，则$z=\frac{1}{3}-\delta$且$0\leqslant\delta\leqslant\frac{1}{3}$。

由平均不等式，有

$$xy\leqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^2\leqslant\left(\frac{1}{3}+\frac{\delta}{2}\right)^2$$

则 $\quad yz+zx+xy-2xyz=2(x+y)+xy(1-2z)$

$$\leqslant\left(\frac{1}{3}-\delta\right)\left(\frac{2}{3}+\delta\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{\delta}{2}\right)^2\left(\frac{1}{3}+2\delta\right)$$

$$=\frac{7}{27}-\frac{\delta^2}{4}+\frac{\delta^3}{2}=\frac{7}{27}-\frac{\delta^2}{2}\left(\frac{1}{2}-\delta\right)\leqslant\frac{7}{27}$$

例15 （85年长沙市竞赛题）

已知$\triangle ABC$的面积S及角A均为定值，记角A的两夹边

为b、c，则当$2b^2+3c^2$取最小值时，$b:c=\sqrt{3}:\sqrt{2}$。

证明： 因为 $S=\frac{1}{2}bc\sin A$，

$$\text{所以}\ bc=\frac{2S}{\sin A} \tag{1}$$

又由平均不等式有

$$2b^2+3c^2\geqslant 2\sqrt{2b^2\cdot 3c^2}=2\sqrt{6}\,bc \tag{2}$$

将(1)代入(2)得 $2b^2+3c^2\geqslant\frac{4\sqrt{6}S}{\sin A}$ （定值）

即$2b^2+3c^2$的最小值是$\frac{4\sqrt{6}S}{\sin A}$。且当$2b^2+3c^2$取得此最小值的条件为$2b^2=3c^2$，从而此时有$b:c=\sqrt{3}:\sqrt{2}$。

三、柯西不等式

定理5（*Cauchy*不等式）

设a_1，a_2，…，a_n与b_1，b_2，…，b_n为任意实数，则

$$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2\leqslant(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)$$

等号当且仅当$\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}=\cdots=\frac{b_n}{a_n}$时成立（约定$a_i=0$时，$b_i=0$，$i=1$，2，…，$n$）。

证法一 先假定a_1，a_2，…，a_n，b_1，b_2，…，b_n都是正数；又设 $A=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$

$$B=\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}$$

作两个序列：$x_1=\frac{a_1}{A}$， $x_2=\frac{a_2}{A}$， $\cdots$， $x_n=\frac{a_n}{A}$，

$x_{n+1}=\frac{b_1}{B}$， $x_{n+2}=\frac{b_2}{B}$， $\cdots$，$x_{2n}=\frac{b_n}{B}$；

$y_1=x_1$， $y_2=x_2$， $\cdots$， $y_n=x_n$， $y_{n+1}=x_{n+1}$，$y_{n+2}=x_{n+2}$，$\cdots$， $y_{2n}=x_{2n}$.

则此两个序列是同序的，故由定理 1（排序不等式）得

$$x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n+x_{n+1}y_{n+1}+\cdots+x_{2n}y_{2n}$$
$$\geqslant x_1y_{n+1}+x_2y_{n+2}+\cdots+x_ny_{2n}+x_{n+1}y_1+x_{n+2}y_2+\cdots$$
$$+x_{2n}y_n,$$

即 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{2n}^2\geqslant 2(x_1x_{n+1}+x_2x_{n+2}+\cdots+x_nx_{2n})$，

亦即 $$\frac{a_1^2}{A^2}+\frac{a_2^2}{A^2}+\cdots+\frac{a_n^2}{A^2}+\frac{b_1^2}{B^2}+\frac{b_2^2}{B^2}+\cdots+\frac{b_n^2}{B^2}$$

$$\geqslant 2\left(\frac{a_1b_1}{AB}+\frac{a_2b_2}{AB}+\cdots+\frac{a_nb_n}{AB}\right).$$

但 $$\frac{a_1^2}{A^2}+\frac{a_2^2}{A^2}+\cdots+\frac{a_n^2}{A^2}=1,$$

$$\frac{b_1^2}{B^2}+\frac{b_2^2}{B^2}+\cdots+\frac{b_n^2}{B^2}=1,$$

故 $$\frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{AB}\leqslant 1,$$

即 $$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\leqslant\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$$
$$\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}.$$

则 $\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_i| \cdot |b_i| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$.

所以 $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$.

证法二：考虑二次函数

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} (a_i x - b_i)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)x^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)x + \sum_{i=1}^{n} b_i^2.$$

因对任意实数x都有$f(x) \geqslant 0$，又当a_1，a_2，…，a_n不全为零时(若a_i全为零不等式显然成立)，二次项系数

$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 > 0$，则有

$$\triangle = 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - 4\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \leqslant 0.$$

于是有 $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$.

上式成为等号的充要条件是方程$f(x) = 0$有二重实根.显然，此根只能是$x = \frac{b_i}{a_i}$，因而

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \cdots = \frac{b_n}{a_n}.$$

注：Cauchy不等式的证法很多，这里就不一一列举了．

例16 （第20届国际竞赛题）

设a_1，a_2，…，a_k，…为两两各不相同的正整数．求证：对任何正整数n，有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}.$$

证明：由柯西不等式，有

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)^2=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{a_k}}{k}\cdot\frac{1}{\sqrt{a_k}}\right)^2$$

$$\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{a^k}{k^2}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right).$$

因a_1，a_2…，a_n是互不相同的正整数，易知

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

则 $$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}.$$

例17 （第21届国际竞赛题）

求出所有实数a，使得存在非负实数x_1，x_2，x_3，x_4，x_5满足下列关系：

$$\sum_{k=1}^{5}kx_k=a,\quad\sum_{k=1}^{5}k^3x_k=a^2,\quad\sum_{k=1}^{5}k^5x_k=a^3.$$

解：设有非负实数x_1，x_2，x_3，x_4，x_5满足题设要求，则由柯西不等式及题设条件，得

$$a^4=\left(\sum_{k=1}^{5} k^3x_k\right)^2=\left[\sum_{k=1}^{5}\left(k^{\frac{1}{2}}\sqrt{x_k}\right)\left(k^{\frac{5}{2}}\sqrt{x_k}\right)\right]^2$$

$$\leqslant\left(\sum_{k=1}^{5} kx_k\right)\left(\sum_{k=1}^{5} k^5x_k\right)=a^4.$$

这样，上式中的不等式只能取等号，于是

$$\frac{k^{\frac{5}{2}}\sqrt{x_k}}{k^{\frac{1}{2}}\sqrt{x_k}}=k^2\quad\frac{\sqrt{x_k}}{\sqrt{x_k}}=\text{常数}\quad(k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5).$$

如果x_1，x_2，x_3，x_4，x_5中有两个或两个以上不为0，上式不可能成立。

所以，只有下面两种情形：

1）$x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=0$，这时$a=0$；

2）某个$x_k=c\neq0$，其余$x_i=0$ $(i\neq k)$，这时由题设得 $kc=a$，$k^3c=a^2$，$k^5c=a^3$。

由此即得 $k^2=a$及$c=k$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$。

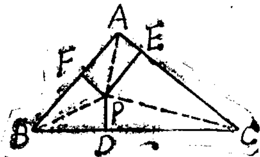
综上讨论可知，当$a=0$，1，4，9，16，25 时，存在非负实数x_1，x_2，x_3，x_4，x_5满足题设方程组。

例18 （第22届国际竞赛题）

设P为$\triangle ABC$内一点，D，E，F分别为P到BC，CA，AB所引垂线的垂足，求所有使

$$\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF}$$

为最小的P点。



（图7-1）

解：如图7—1.

设$\triangle ABC$的面积为S，显然有

$$BC\cdot PD+CA\cdot PE+AB\cdot PF=2S.$$

由柯西不等式，得

$$\left[\left(\sqrt{\frac{BC}{PD}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{CA}{PE}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{AB}{PF}}\right)^2\right]\left[\left(\sqrt{BC\cdot PD}\right)^2+\right.$$

$$\left.\left(\sqrt{CA\cdot PE}\right)^2+\left(\sqrt{AB\cdot PE}\right)^2\right]$$

$$\geqslant(BC+CA+AB)^2.$$

即 $\dfrac{BC}{PD}+\dfrac{CA}{PE}+\dfrac{AB}{PF}\geqslant\dfrac{(BC+CA+AB)^2}{2S}.$

上式等号当且仅当$PD=PE=PF$时成立．因而使

$$\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF}$$

为最小的P点是$\triangle ABC$的内心．

例19 （第24届国际竞赛题）

设a，b，c是三角形的三边长．求证：

$$b^2c(b-c)+c^2a(c-a)+a^2b(a-b)\geqslant 0$$

并确定等号何时成立．

证明：令$a=y+z$，$b=z+x$，$c=x+y$ （x，y,$z\in R^+$）代入原不等式，展开并化简得

$$xy^3+yz^3+zx^3-x^2yz-xy^2z-xyz^2\geqslant 0,$$

即 $xyz\left(\dfrac{y^2}{z}+\dfrac{z^2}{x}+\dfrac{x^2}{y}-x-y-z\right)\geqslant 0$

$$\Longleftrightarrow\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\geqslant x+y+z.$$

最后这个不等式可用柯西不等式证明如下：

$$(x+y+z)^2=\left(\sqrt{y}\cdot\frac{x}{\sqrt{y}}+\sqrt{z}\cdot\frac{y}{\sqrt{z}}+\sqrt{x}\cdot\frac{z}{\sqrt{x}}\right)^2$$

$$\leqslant(y+z+x)\left(\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\right),$$

故 $\quad x+y+z\leqslant\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}$.

例20 （第 7 届美国数学竞赛题）

设$a+b+c+d+e=8$，$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=16$，求 e的最大值．

解：显然，本题企图用解方程的办法是无能为力的．现在，借助不等式求解。

由柯西不等式及题设得：

$$8-e=(1\cdot a+1\cdot b+1\cdot c+1\cdot d)$$

$$\leqslant(1+1+1+1)^{\frac{1}{2}}(a^2+b^2+c^2+d^2)=2\,(16-e^2)^{\frac{1}{2}}.$$

即 $\quad(8-e)^2\leqslant4(16-e^2)$，$e(5e-16)\leqslant0$.

所以．$0\leqslant e\leqslant\frac{16}{5}$.

以上不等式当且仅当$a=b=c=d$ 时成立等号．由此可知，e的最大值是 $\frac{16}{5}$，此时$a=b=c=d=\frac{6}{5}$.

例21 （第 3 届全国数学冬令营竞赛题）

设a_1，a_2，…，a_n是给定的不全为零的实数，r_1，r_2，…，r_n是实数，如果不等式

$$\sum_{i=1}^{k}r_i(x_i-a_i)\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}-\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\qquad(*)$$

对任何实数x_1，x_2，…，x_n成立，求r_1，r_2，…，r_n的值。

解法一。令$x_i=a_i$　$(i=2,3,\cdots,n)$，

$$b_1^2=\sum_{i=2}^{n}a_i^2.$$

则(＊)式变成

$$r_1(x_1-a_1)\leqslant\sqrt{x_1^2+b_1^2}-\sqrt{a_1^2+b_1^2}$$

$$=\frac{x_1^2-a_1^2}{\sqrt{x_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_1^2+b_1^2}}$$

$$=\frac{(x_1+a_1)(x_1-a_1)}{\sqrt{x_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_1^2+b_1^2}} \tag{1}$$

当$x_1>a_1$时，由(1)得

$$r_1\leqslant\frac{x_1+a_1}{\sqrt{x_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_1^2+b_1^2}} \tag{2}$$

由于(2)式对所有大于a_1的x_1均成立，所以

$$r_1\leqslant\lim_{x_1\to a_1+}\frac{x_1+a_1}{\sqrt{x_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_1^2+b_1^2}}$$

$$=\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\frac{a_1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}}. \tag{3}$$

当$x_1<a_1$时，由(1)得

$$r_1\geqslant\frac{x_1+a_1}{\sqrt{x_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_1^2+b_1^2}} \tag{4}$$

由于(4)式对所有小于a_1的x_1均成立，所以

$$r_1 \geqslant \lim_{x_1 \to a_1} \frac{x_1 + a_1}{\sqrt{x_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_1^2 + b_1^2}}$$

$$= \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{a_1}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2}} \tag{5}$$

由(3)和(5)得 $\quad r_1 = \dfrac{a_1}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2}}$.

类似地我们可以求得r_2，r_3，…，r_n的值. 这样一来，我们有

$$r_i = \frac{a_i}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2}} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

且 $\quad \sum\limits_{i=1}^{n} r_i^2 = 1$.

将求得的r_i($i = 1$，2，…，n)的值代入不等式(*)左边，并利用柯西不等式，得

$$\sum_{i=1}^{n} r_i(x_i - a_i) = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i - \sum_{i=1}^{n} r_i a_i$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} r_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2}}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2}}$$

$$=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}-\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}.$$

这就是说，我们求得的r_1，r_2，…，r_n的值确能使不等式(*)对任何实数x_1，x_2，…，x_n成立。

解法二. 在(*)式中令$x_i=0$　($i=1$，2，…，n)，

得　$$\sum_{i=1}^{n} r_i a_i \geqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2};$$

令　$x_i=2a_i$　($i=1$，2，…，n)，得

$$\sum_{i=1}^{n} r_i a_i \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}.$$

这样一来，$$\sum_{i=1}^{n} r_i a_i = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \tag{1}$$

又由柯西不等式，得

$$\sum_{i=1}^{n} r_i a_i \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} r_i^2}\ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \tag{2}$$

由(1)和(2)得　$$\sum_{i=1}^{n} r_i^2 \geqslant 1 \tag{3}$$

将(1)式代入不等式(*)，得

$$\sum_{i=1}^{n} r_i x_i \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

在这个不等式中令$x_i=r_i$　($i=1$，2，…，n)

$$\sum_{i=1}^{n} r_i^2 \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} r_i^2}.$$

不难看出 $\sum_{i=1}^{n} r_i^2 \neq 0$。否则，(*)式将不成立．这样一来，有 $\sum_{i=1}^{n} r_i^2 \leqslant 1$　　(4)

由(3)和(4)得 $\sum_{i=1}^{n} r_i^2 = 1$　　(5)

又(2)式取等号的充要条件是$x_i = Ka_i$，其中K为常数，$i=1, 2, \cdots, n$。将它们代入(5)式，得

$$K = \pm \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}.$$

由于根号前取负号使(1)式不成立，故

$$K = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}.$$

因此，有$r_i = \dfrac{a_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}$　　$(i=1, 2, \cdots, n)$

(以下同解法一，故略)

例22　(第3届全国数学冬令营竞赛题)

(i) 设三个正实数a, b, c满足

$$(a^2+b^2+c^2)^2 > 2(a^4+b^4+c^4)$$

求证：a，b，c一定是某个三角形的三条边长．

(ii) 设n个正实数a_1，a_2，$\cdots$，a_n满足

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)^2 > (n-1)(a_1^4+a_2^4+\cdots+a_n^4)\text{(其中}n\geqslant 3)$$

求证：这些数中任何三个一定是某个三角形的三条边长。

证明：(i)由题设，得

$$2(a^4+b^4+c^4)-(a^2+b^2+c^2)<0.$$

经化简分解因式得

$$(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(a-b-c)<0 \qquad (1)$$

下面证明$a+b>c$，$b+c>a$，$c+a>b$三者必同时成立。否则，其中至少有一个不成立，不妨设$a+b\leqslant c$。因为$a,b>0$，所以有$a<c$，$b<c$。于是

$$a+b-c\leqslant 0,\quad a-b+c=a+(c-b)>a>0,$$

$$a-b-c\leqslant(a-b)-(a+b)=-2b<0,$$

则 $(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)\geqslant 0$

这与不等式(1)矛盾。

因此，必须同时有$a+b>c$，$b+c>a$，$c+a>b$。这就表明a，b，c必为某三角形的三条边长。

(ii)对于a_1，$a_2\cdots$，a_n这n个正实数，任取三个，不妨设为a_1，a_2，a_3，则由柯西不等式有

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)=\left(\frac{\sum_{i=1}^{3} a_i^2}{2}+\frac{\sum_{i=1}^{3} a_i^2}{2}+\sum_{i=4}^{n} a_i^2\right)^2$$

$$\leqslant\left[\left(\frac{\sum_{i=1}^{3} a_i^2}{2}\right)^2+\left(\frac{\sum_{i=1}^{3} a_i^2}{2}\right)^2+\sum_{i=4}^{n} a_i^4\right]\underbrace{(1^2+1^2+\cdots+1^2)}_{n-1\text{个}}$$

$$=(n-1)\left[\frac{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^2}{2}+\sum_{i=4}^{n} a_i^4\right] \qquad (2)$$

由(2) 式及题设有$(n-1)\left[\frac{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^2}{2}+\sum_{i=4}^{n} a_i^4\right]>$

$(n-1)\sum_{i=1}^{n} a_i^4$化简后得$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^2>2(a_1^4+a_2^4+a_3^4)$

则由(i)知a_1、a_2、a_3一定是某个三角形的三条边长。

第 八 讲

关于格点问题

平面直角坐标系中，纵横坐标都是整数的点称为格点（也称为整点）。近年来，在国内外数学竞赛中，常有关于格点的试题。

一、分类问题

我们不难知道这样两个事实：

1. 平面格点可分为（奇，奇）、（奇，偶）、（偶，奇）、（偶，偶）四种类型；

2. 若两个格点为同一类型格点时，则它们的中点仍为格点。

例1 （85年全国竞赛题）

请设计一种方法，将所有的格点染色，每一点染成白色、红色或黑色中的一种颜色，使得：(1)每一种颜色的点出现在无穷多条平行于横轴的直线上；(2)使得任意的白点A、红点B、黑点C总可以找到一个红点D使$ABCD$为一个平行四边形。

解法一 由格点的分类以及红色点在三种颜色中的特殊要求，设计染色方法如下：把（奇，奇）型的格点染成白色，（偶，偶）型的点格染成黑色，其余的格点染成红色。

首先，易知这种染色方法满足条件(1)，下证这种染色方法满足条件(2)。

设任取的白点A、红点B、黑点C（不妨设点B为（奇，偶）型的格点）的坐标分别为：$A(2m+1, 2n+1)$，$B(2p+1, 2q)$，$C(2s, 2t)$，其中m、n、p、q、s、t均为整数。

再设平行四边形$ABCD$的另一顶点为$D(x, y)$，由平行四边形对角线互相平分的性质和中点坐标公式，得

$$x+(2p+1)=(2m+1)+2s,$$

$$y+2q=(2n+1)+2t,$$

即

$$x=2(m+s-p),$$

$$y=2(n+t-q)+1.$$

则$D(x, y)$是（偶，奇）型的点，所染的颜色为红色。

同理，若点B是（偶，奇）型的红点，可证平行四边形$ABCD$的另一个顶点D是（奇，偶）型的红点。由此可见，设计的染色方法也满足条件(2)。

解法二 命题组提出的两种设计方法，也是按格点坐标x，y的奇偶性分类染色，可以简明地表示如下：

x　y
红{奇　奇—黑
　　偶　偶—白
设计一{　　　　}设计二
白—奇　偶}红
黑—偶　奇

这两种设计符合题中要求(1)是显然的。对于要求(2)，就任意白点$A(x_1, y_1)$，红点$B(x_2, y_2)$，黑点$C(x_3, y_3)$而言，要找红点$D(x, y)$使$ABCD$为平行四边形，首先必须

要A、B、C三点不共线，即 $(x_2-x_1)(y_3-y_1)\neq(y_2-y_1)(x_3-x_1)$，

还要AC、BD互相平分，即中点一致，亦即

$$x_1+x_3=x_2+x,\qquad y_1+y_3=y_2+y.$$

这两点就是证明的要点.（详证略）

解法三 考虑更强的要求，把条件（1）改为："每一种颜色的点出现在无穷多条平行于横轴的直线$y=m(m\in Z)$上，并且直线$y=m$一旦出现某种颜色就无穷次出现这种颜色."

事实上，正如前面所述，平面上的格点可因其坐标数的奇偶性分为四类：S_1（奇，奇），S_2（偶，偶），S_3（奇，偶），S_4（偶，奇）. 故可任取两类分别染白、黑色，剩下的两类染红色，得出$P_4^2=12$种大同小异的染色方法.（可理解为一种染法的平移、旋转、伸缩）比如，对$k=0$，±1，±2，…，我们把直线系$x+y=2k$上的格点染红色；对直线系$x+y=2k+1$上的格点，属S_3的染白色，属S_4的染黑色.

对每一条平行于x轴的直线$y=m$（$m=\pm1$，±2，…），当m为奇数时，有且只有红、黑两色；当m为为偶数时，有且只有红、白两色. 由x，m可取任意整数知，染色满足（1）的加强.

任取白点$A(x_1,y_1)$，红点$B(x_2,y_2)$，黑点$C(x_3,y_3)$. 由于x_2-x_1与y_2-y_1总有不同奇偶性，x_3-x_1与y_2-y_1都是奇数，故有

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{vmatrix}$$

$$=(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)$$

$=$ 偶数 $-$ 奇数 $\neq 0$，

所以A、B、C三点不共线．再以A、C的中点为对称中心，作B的对称点$D(x_1+x_3-x_2,\ y_1+y_3-y_2)$，则$ABCD$为平行四边形．又因为$D$的坐标满足$x_D+y_D=(x_1+y_1+x_3+y_3)-(x_2+y_2)=$ 偶数 $-$ 偶数 $=$ 偶数，故D为红点，即是说这样的染色也满足(2)．

注：本题是86年全国高中数学联赛的最后一道，它选自加拿大KimKin的《数学一千零一夜》，命题组作了些技术上的变更．通常，最后一题是难度大的“把关题”，但这道题却有一种出人意外地简单的解法：

解法四 由于(2)要求能组成平行四边形，所以白、红、黑三色不能共线．又由于组成的平行四边形有两个红点，因此，染色应尽量多出现红点．注意到(1)只对y轴的正、负方向有要求，所以我们可以方便地取y轴上的格点相间染成白、黑两色．例如$(0,\ 2k)$染白色，$(0,\ 2k+1)$染黑色．其余的格点全染红色．由于没有任何一个红点在y轴上，故白、黑、红三色点不共线是显然的．又任取白点$A(0,\ 2k)$，红点$B(m,\ n)(m\neq 0)$，黑点$C(0,\ 2k'+1)$，以A，C的中点$\left(0,\ \dfrac{2k+2k'+1}{2}\right)$为对称中心，作$B$的对称点$D(-m,\ 2k+2k'+1-n)(m\neq 0)$，则$ABCD$为平行四边形，且由$D$是不在$y$轴上的格点知，$D$是红点，染色也满足条件(2)．

说明1：上述取y轴染白、黑色不是唯一的方法，任何一条不平行于x轴而又过无穷个格点的直线都可以代替y轴．特别地，取$y=\pm x$代替y轴可满足更强的条件：每一种颜色的点既出现在无穷多条平行于横轴的直线上，又出现在无穷

多条平行于纵轴的直线上.

说明2：若不限制B与D必须为相对顶点，那么还可以在B的上、下方各找到点D_1，D_2分别组成平行四边形。这时$\triangle ABC$恰好是$\triangle DD_1D_2$的中位线三角形.

二、整数解问题

关于方程(或方程组)的整数解问题，实际上是求满足条件的格点问题.反之,格点问题也可以用有关整数解的理论及方法来考虑.

例2 （1976年美国竞赛题稍加改编）

已知抛物线的方程为$y=ax^2+bx+c$。如果抛物线经过$(-1, -11)$，$(1, 1)$及$(2, 4)$三个格点，求证此抛物线的顶点也是一个格点.

证明 由题意得

$$\begin{cases}-11=a-b+c\\ 1=a+b+c\\ 4=4a+2b+c,\end{cases}\qquad \text{解得}\begin{cases}a=-1\\ b=6\\ c=-4.\end{cases}$$

因为抛物线的顶点坐标是$\left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$，所以将$a$，$b$，$c$各值代入之，即得抛物线的顶点坐标为(3、5)，从而证得本题结论成立。

例3 （57年北京市竞赛题改编）

试求满足下列方程组的格点数：

$$\begin{cases}x^{x+y}=y^{60}\\ y^{x+y}=x^{15}\end{cases}$$

解法一 当$x<0$时，由$x^{x+y}=y^{60}>0$知$x+y$必为偶数，

于是 $y^{x+y}>0$，这与$y^{x+y}=x^{15}<0$ 矛盾，因而这时方程无解；

当$x=0$时，$y^y=0$无解，则原方程无解；

当$x>0$时，$y^2>0$，可取对数

$$\begin{cases}(x+y)\log x=30\log y^2\\(x+y)\log y^2=30\log x\end{cases}$$

由此得 $(\log x)^2=(\log y^2)^2$，

从而 $\log x=\log y^2=0$ (1)

或者 $\begin{cases}\log x=\log y^2\neq 0\\x+y=30\end{cases}$ (2)

或者 $\begin{cases}\log x=-\log y^2\neq 0\\x+y=-30\end{cases}$ (3)

由(1)得 $\begin{cases}x=1\\y=\pm 1;\end{cases}$

由(2)得 $\begin{cases}x=y^2\\x+y=30\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=25\\y=5,\end{cases}$ $\begin{cases}x=36\\y=-6;\end{cases}$

由(3)得 $\begin{cases}x=y^2\\x+y=-30.\end{cases}$ 无整数解。

综上可知原方程组共有四组整数解：

$\begin{cases}x=1\\y=1;\end{cases}$ $\begin{cases}x=1\\y=-1;\end{cases}$ $\begin{cases}x=25\\y=5;\end{cases}$ $\begin{cases}x=36\\y=-6.\end{cases}$

从而，满足方程组的格点有4个。

解法二 由 $y^{(x+y)^2}=x^{15(x+y)}=(y^{60})^{15}=y^{900}$

可知$y=\pm1$，或者$(x+y)^2=900$，即$x+y=\pm30$。

以$y=\pm1$代入第二式有$(\pm1)^{x\pm1}=x^{15}$，则$|x|=1$。但$x=-1$不是解，而$x=1$，$y=\pm1$是方程的两组整数解。

当$x+y=-30$时，由第一式得 $x=y^{-2}$，再代回$x+y=-30$有$y^3+30y^2+1=0$，此时无整数解。

当$x+y=30$时，用$x=y^2$代回原式，有
$y^2+y-30=0$，即有$y=5$及$y=-6$，相应地 $x=25$及$x=36$又为两组整数解，故原方程组有四组整数解：

$$\begin{cases}x=1\\y=1;\end{cases}\quad\begin{cases}x=1\\y=-1;\end{cases}\quad\begin{cases}x=25\\y=5;\end{cases}\quad\begin{cases}x=36\\y=-6.\end{cases}$$

从而满足方程组的格点有4个.

例4 （第12届全俄中学生数学竞赛题稍改）

求满足方程

$$\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}=\frac{3}{7}$$

的所有格点。

解：设x、y是满足原方程的整数，则

$$7(x+y)=3(x^2-xy+y^2) \tag{1}$$

令$p=x+y$，$q=x-y$，

则 $x=\frac{1}{2}(p+q)$，$y=\frac{1}{2}(p-q)$。

代入(1)，得整数p、q满足方程

$$28p=3(p^2+3q^2) \tag{2}$$

可见p是非负整数，且被3整除，记 $p=3k$，k为非负整数。将$p=3k$代入(2)，得

$$28k=3(3k^2+q^2). \tag{3}$$

由此知k非负且被3整除，记$k=3m$，m是非负整数。将$k=3m$代入(3)，得

$$28m=27m^2+q^2,$$

即 $m(28-27m)=q^2$。

因为$q^2\geqslant 0$，所以$m(28-27m)\geqslant 0$，故$m=0$或$m=1$。

当$m=0$时，$p=q=0$，即 $x=y=0$，但它们不满足原方程；

当$m=1$时，$p=9$，$q=\pm 1$，即$x=5$，$y=4$或$x=4$，$y=5$。经检验它们均满足原方程。

综上可知，所求格点有两个：(5,4)，(4,5)。

例5 (85年长沙市竞赛题)

求证：双曲线$2x^2-5y^2=7$上不存在格点.

证明：假设所给双曲线上有格点(x_0,y_0)，

则 $$5y_0^2=2x_0^2-7 \tag{1}$$

由于x_0与y_0均为整数，则(1) 式右边$2x_0^2-7$为奇数，于是y_0^2为奇数，从而y_0亦须为奇数。不妨设 $y_0=2m+1$ ($m\in Z$)代入(1) 式得

$$5(2m+1)^2=2x_0^2-7$$

则 $$x_0^2=2(m^2+5m+3) \tag{2}$$

由(2)知 x_0^2为偶数，从而x_0亦为偶数.

令$x_0=2n(n\in Z)$，代入(2)得

$$4n^2=2(5m^2+5m+3),$$

即 $$2n^2-3=5m(m+1) \tag{3}$$

由于$m(m+1)$的二因子中，必有一个为偶数，所以(3)式右边为偶数，而左边却为奇数，故(3) 式不成立。这表明假设错误，从而原命题得证。

例6 （87年全国竞赛题）

试证：存在一个同心圆的集合，使得

（1）每个整点都在此集合的某一圆周上；

（2）此集合的每个圆周上，有且只有一个整点.

证法一：问题在于找到同心圆的圆心. 要使每个整点都在某一圆周上，这好办，只要以每个整点到圆心的距离为半径作圆就可以了. 这样，每个圆周上都有一个整点. 困难在于“只有”一个整点. 因此，我们要找这样的圆心，使得注意两个整点到圆心的距离都不相等. 换言之，要选择圆心(a, b)，使得不同的任二整数对(x_1, y_1)、(x_2, y_2)都不能满足等式

$$(x_1-a)^2+(y_1-b)^2=(x_2-a)^2+(y_2-b)^2,$$

即 $2(x_2-x_1)a+2(y_2-y_1)b=x_2^2-x_1^2+y_2^2-y_1^2$ （＊）

（＊）式的右边是整数，要使等式不成立，只须选择a、b的值使左边不是整数. 为此，先取 a为某无理数，而b为任意有理数. 当$x_2\neq x_1$时，（＊）式左边为无理数，显然不能等于右边；当$x_2=x_1$时，$y_2\neq y_1$(因两点不同)，这时（＊）式可约简为$2b=y_2+y_1$，右边仍然是整数，可取b为分母异于2的既约分数，等式就不能成立. 由此可见，满足题设条件的同心圆的集合确实存在.

证法二：假设同心圆圆心为$p(x,y)$，任两整点$A(a,b)$和$B(c,d)$，其中$a=c$，$b=d$不同时成立.

因为 $|PA|^2=(x-a)^2+(y-b)^2=x^2+y^2+a^2+b^2-2ax-2by,$

$|PB|^2=(x-c)^2+(y-d)^2=x^2+y^2+c^2+d^2-2cx-2dy.$

所以 $|PA|^2-|PB|^2=a^2-c^2+b^2-d^2+2(c-a)x+2(d-b)y$.

又因a、b、c、$d\in Z$，$a=c$，$b=d$不同时成立，因此，$|PA|\neq|PB|$，只须取x为任意无理数，y取任意分母不为 2 的非整有理数即可（或x、y各取形如$\sqrt{m}$、$\sqrt{n}$的最简非同类根式的无理数，其中m、$n\in N$）.如取$P\left(\sqrt{2},\ \frac{1}{3}\right)$（或 $P(\sqrt{2},\ \sqrt{3})$），则任意两个不同整点到$P\left(\sqrt{2},\ \frac{1}{3}\right)$的距离都不相等.

把所有整点到P点的距离从小到大排成一列r_1，r_2，r_3，…，以$P\left(\sqrt{2},\ \frac{1}{3}\right)$为圆心，以$r_1$，$r_2$，$r_3$，… 为半径作的同心圆所成的集合即为所求.

注：P点坐标还可取其它超越数，如$(\pi,\ 0)$、$(\pi,\ e)$等等.

证法三. 设坐标平面上任二不同整点$A(a,\ b)$和$B(c,\ d)$，分三种情况讨论.

(1) $a\neq c$，$b\neq d$，中点$M\left(\frac{a+c}{2},\ \frac{b+d}{2}\right)$，$AB$的垂直平分线方程为

$$y-\frac{b+d}{2}=\frac{c-a}{b-d}\left(x-\frac{a+c}{2}\right);$$

(2) $a=c$，$b\neq d$，中点$M\left(a,\ \frac{b+d}{2}\right)$，$AB$的垂直平分线方程为 $y=\frac{b+d}{2}$;

(3) $a \neq c$，$b=d$，中点$M\left(\frac{a+c}{2}, b\right)$，$AB$ 的垂直平分线方程为 $x=\frac{a+c}{2}$。

显然，只有在上述三类直线上的点才有可能到平面上某两整点的距离相等。若取 $P(\sqrt{2}、\sqrt{3})$，则必然不在上述三类直线上，即$P(\sqrt{2}、\sqrt{3})$ 到任意两个不同整点的距离都不相等。

以下同证法二(略)。

证法四：取点$P\left(\sqrt{2}, \frac{1}{3}\right)$，设整点$(a, b)$和$(c, d)$到点$P$的距离相等，则

$$(a-\sqrt{2})^2+\left(b-\frac{1}{3}\right)^2=(c-\sqrt{2})^2+\left(d-\frac{1}{3}\right)^2,$$

即 $2(c-a)\sqrt{2}=c^2-a^2+d^2-b^2+\frac{2}{3}(b-d)$。

上式仅当两端都为零时成立。

所以，$c=a$ (1)

$$c^2-a^2+d^2-b^2+\frac{2}{3}(b-d)=0 \quad (2)$$

(1) 代入(2) 并化简，得

$$d^2-b^2+\frac{2}{3}(b-d)=0$$

即$(d-b)\left(d+b-\frac{2}{3}\right)=0$。

由于b、d都是整数，第二个因子不能为零，因此$b=d$，

从而点(a,b)与(c, d)重合。故任意两个整点到$P\left(\sqrt{2}, \frac{1}{3}\right)$的距离都不相等。

现将所有整点到P点的距离从小到大排成一列：d_1，d_2，d_3，…。

显然，以p为圆心，以d_1，d_2，d_3，…为半径作的同心圆所成的集合即为所求。

注1：圆心p可以选为任何一个这样的非有理点(α, β)，其中α，β之一为纯无理数（即是不含有理项的无理数），如2π，$\frac{1}{3}\sqrt{2}$等，另一个为不等于$\frac{k}{2}(k\in Z)$的有理数。因为，当注意到非零的有理数和纯无理数之积仍为纯无理数时，我们便可类似上述作法得到证明。因此，合于题设要求的同心圆的集合可作无穷多个。

注2：本题还可作如下扩充：

问题1．在平面上作出一个同心圆的集合，使得：（1）平面上任一整点必位于该同心圆集合中的某一个圆周上；

（2）每一个圆周上有且只有两个整点。

请证明你的作法的正确性。

解：取点$O'\left(\sqrt{2}, \frac{1}{2}\right)$。

先证：对任一整点$A(a, b)$，必存在唯一的另一整点$B(c, d)$，使得　$|O'A|=|O'B|$。

事实上，若$|O'A|=|O'B|$，即

$$(a-\sqrt{2})^2+\left(b-\frac{1}{2}\right)^2=(c-\sqrt{2})^2+\left(d-\frac{1}{2}\right)^2,$$

则有$2(c-a)\sqrt{2}=c^2-a^2+d^2-b^2+(b-d)$。

于是应有 $\begin{cases} c-a=0 \\ c^2-a^2+d^2-b^2+(b-d)=0 \end{cases}$

即 $\begin{cases} c=a \\ (d-b)(d+b-1)=0 \end{cases}$

从而得到两组解：

① $\begin{cases} c=a \\ d=b; \end{cases}$ ② $\begin{cases} c=a \\ d=1-b \end{cases}$.

第①组解表示$(c、d)$与(a, b)重合，第②组解表示(c, d)是异于(a, b)且满足条件的点。因此，对任一整点A，在平面上必存在（唯一的）另一整点B到$O'\left(\sqrt{2}, \frac{1}{2}\right)$的距离相等。

将平面上所有整点按它们与$O'(\sqrt{2}, \frac{1}{2})$的距离从小到大排成一个序列：

A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, …, A_i, B_i, …，其中A_i与B到O'的距离均为$d_i (i=1, 2, 3, \cdots)$。

于是，以O'为园心，分别以d_1, d_2, d_3, …, d_i, …为半径的同心园集合就为所求集合。

注 3：如同注 1 所述，这里，我们还可取这样的$O'(\alpha, \beta)$为园心来作满足要求的同心园的集合，其中α，β之一为纯无理数，另一个为$\frac{k}{2}$（k为奇数）。不妨设α为纯无理数，

$\beta=\frac{k}{2}$（k为奇数）。因为对任一整点$A(a, b)$，若整点$B(c, d)$使得$|O'A|=|O'B|$。根据α、β的取值，则有

$$\begin{cases} c-a=0 \\ (d-b)(d+b-2\beta)=0. \end{cases}$$

于是 $\begin{cases} c=a \\ d=b \end{cases}$ 或 $\begin{cases} c=a \\ d=-b+2\beta \end{cases}$

当$\beta=\frac{k}{2}$（k为奇数）时，有$d=-b+2\beta\neq b$（因$\beta\notin Z$）。

因此，满足题设要求的同心圆的集合有无穷多种作法。

问题2．在平面上不存在一个同心圆的集合，使得：(1)平面上任一整点必位于该同心圆的集合中的某一个圆周上；

(2) 每一个圆周上有且只有n个整点。这里$n\geqslant 3$，$n\in N$。

证明：当$n=3$时，显然（至少）在过三个整点的同心圆的集合中最小的一个圆的圆周上，整点只能是相邻的四个整点(a, b)，$(a+1, b)$，$(a+1, b+1)$，$(a, b+1)$．这时圆心必为$(a+\frac{1}{2}, b+\frac{1}{2})$，其中$a$，$b\in Z$．否则，圆内必有其它（不在任何圆周上的）整点，这与题意不合，说明$n=3$时，不存在合于题意的同心圆的集合．

当$n=4$时，虽然以$(a+\frac{1}{2}, b+\frac{1}{2})$（$a$、$b\in Z$）为圆心．以$r_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$为半径的（最小的）圆上有 4 个整点，但以$r_2=\frac{\sqrt{10}}{2}$为半径的（次小）圆上就有 8 个整点，仍不合题意，所以$n=4$时不存在合于题意的同心圆的集合．

当$n\geqslant 5$时，$n\in N$时，因为合于题意的两个条件的最小圆都不存在，所以，当$n\geqslant 5$时，$n\in N$时也不存在合于题意的同心圆的集合。

注4：命题2表明命题1不能再扩充了。

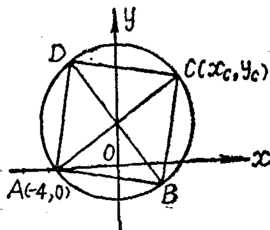
三、格点多边形

顶点都是格点的多边形称为格点多边形。

例7 （78年江苏省竞赛题稍加改编）

已知正方形的一个顶点为$A(-4,0)$，它的中心为$p(0,3)$。求证此方形是一个格点正方形。

证明：如图8-1。



（图8-1）

设c点的坐标为(x_c,y_c)。

因为中心是正方形对角线AC的中点，所以有

$$\begin{cases}\dfrac{x_c+(-4)}{2}=0\\ \dfrac{y_c+0}{2}=3\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}x_c=4\\ y_c=6.\end{cases}$

因而正方形顶点C的坐标是(4，6)。

又由于正方形的顶点在以P为圆心，以PA为半径的圆周上，而且正方形的顶点B和D必在过P点且垂直于pA的直线上。

显然 $K_{PA}=\dfrac{3}{4}$，$|PA|=\sqrt{4^2+3^2}=5$。

因此 $\begin{cases} x^2+(y-3)^2=25 \\ y-3=-\frac{4}{3} \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$， $\begin{cases} x=-3 \\ y=7. \end{cases}$

则正方形另两个顶点是$B(3,\ -1)$和$D(-3,\ 7)$。

综上得知正方形$ABCD$是格点正方形.

例 8 （第38届美国中学数学竞赛（$AHSME$）试题）

$\triangle ABC$是一个格点三角形. 顶点A的坐标是$(0,\ 0)$，顶点B的坐标是$(36,\ 15)$。则$\triangle ABC$面积的最小值可能是

$(A)\frac{1}{2}$，$(B)1$，$(C)\frac{3}{2}$，$(D)\frac{13}{2}$，(E)无最小值.

解：设顶点C的坐标为$(x,\ y)$. 那么C到AB的距离$\frac{1}{13}|5x-12y|$就是三角形的高，要最小. 因为要求x、y都是整数，所以$|5x-12y|$应该是正整数，最小是1，这是可能的. 如$x=5$，$y=2$；或$x=7$，$y=3$. 那么三角形的最小面积是

$$\frac{1}{2}\cdot 39\cdot\frac{1}{13}=\frac{3}{2}.$$

因此，应选答案(C)。

例 9 （第20届全苏中学生数学奥林匹克试题）

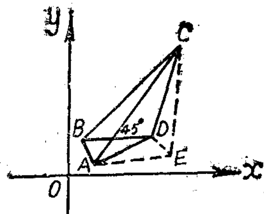
证明：在坐标平面上不能绘出一个凸四边形，使得其一条对角线的长是另一条的两倍，且对角线间夹角为45°，而四边形各顶点坐标均为整数(即为格点四边形).

证明. 假设在坐标平面上可绘出满足题设条件的凸四边

形$ABCD$，其各顶点的坐标均为整数（即为格点四边形）。

已知$|AC|=2|BD|$，AC与BD间的夹角为45°。

如图8-2．作$AE \perp\!\!\!\!= BD$，则E点也是格点且，$\angle CAE=45°$．由余弦定理有



（图8-2）

$$|CE|^2=|AC|^2+|AE|^2-2|AC||AE|\cos 45°$$

即 $$|CE|^2=|AC|^2+|BD|^2-2\sqrt{2}|BD|^2.$$

易知，整点间的距离的平方是整数，于是上面等式的左端为整数，而右端为无理数，这一矛盾表明假设不成立，因而原命题得证。

四、其它有关问题．

例10 （78年兰州市竞赛题）

一质点从坐标原点$O(0,0)$开始，要移动到点$A(3,7)$去．假如其移动方式类似于象棋中“过河卒”的走法，即只能沿坐标线走，而不能走坐标格的对角线，又规定其移动方向只能向右或向上，试问：质点从O移动到A共有多少种不同途径？

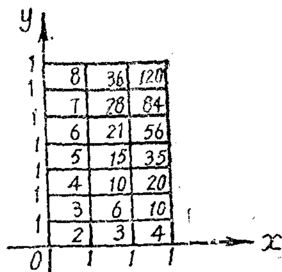
解：因为规定其移动方向只能向右或向上，所以由O点至某一格点，只能经由左、下相邻两格点．故由O点至某一线点的不同途径数就必然是由O点至其左、下相邻两格点的不同途径数之和．例如，由点O至$(1,1)$点，那么只能经由$(1,1)$点的左邻格点$(0,1)$及下邻格点$(1,0)$，而由O点至$(0,1)$点及$(1,0)$点都各仅有一种途径，故由O点至$(1,1)$

点的途径数就为二者之和，即等于 2 。如此类推，可得由原点O至每一格点的不同途径数。现注明在图8-3中的各格点处（此即为二项式系数图）。故由O点移动到A点共有120种不同途径。

注：此题解法不难推广，由点(0，0)到点(m，n)共有$C_{m+n}^{m}=C_{m+n}^{n}=\dfrac{(m+n)!}{m!\ n!}$种不同途径。

例11（79年黑龙江省竞赛题）

将全部正整数对，按如下所示箭头方向依次编号，每一数对的编号数写在该数对的前面。例如6(1，3)表示数对(1，3)的编号数为6。问数对(p，q)(p，q为正整数)的编号数是多少？数对(100，99)的编号数是多少？



（图8-3）

1(1，1)→2(1，2)　6(1，3)→7(1，4)　15(1，5)→…

↙　↗　↙　↗

3(2，1)　5(2，2)　8(2，3)　14(2，4)　(2，5)…

↓　↙　↗

4(3，1)　9(3，2)　13(3，3)　(3，4)　(3，5)…

↙　↗

10(4，1)　12(4，2)　(4，3)　(4，4)　(4，5)…

↓　↗

11(5，1)　(5，2)　(5，3)　(5，4)　(5，5)…

…　…　…　…　…

解：设(p、q)的编号数为n，显然n等于编号数不大于n的数对的个数。

如图表，数对(p,q)在第p行第q列的位置上。(p，q)的

右上方及左下方的相邻数对分别为$(p-1, q+1)$及$(p+1, q-1)$。这三个数对的位置特征是：在同一斜边l上，其数量特征是每一数对中两数之和均为定值$p+q$。不难看出：一个数对是否在l上，取决于它的两数之和是否为$p+q$。于是，在l上位于第1行之数对为$(1, p+q-1)$；位于第1列的数对为$(p+q-1, 1)$。

从图表易见，编号数不大于n的数对由两部分组成：

第一部分是l左上方（不包含l）“三角块”内的全部数对，其个数共有：

$$1+2+3+\cdots+(p+q-2)=\frac{(p+q-1)(p+q-2)}{2}\text{（个）}$$

第二部分是l上编号数不大于n的全部数对。其个数分两种情况讨论：

（1）当$p+q$为奇数时，由于编号方向是$(1, p+q-1)$向(p, q)的，所以$(p、q)$是l上按箭头方向的第p个数对；

（2）当$p+q$为偶数时，由于编号方向是自$(p+q-1, 1$向(p, q)的，故(p, q)是l上按箭头方向的第q个数对。

综上可得

$$n=\frac{(p+q-1)(p+q-2)}{2}+r$$

其中 $r=\begin{cases}p & (p+q\text{为奇数})\\ q & (p+q\text{为偶数})\end{cases}$

当$p=100$，$q=99$时，代入上式得

$$n=\frac{198\times197}{2}+100=19603.$$

即数对$(100, 99)$的编号数为19603。

第 九 讲

关于染色问题

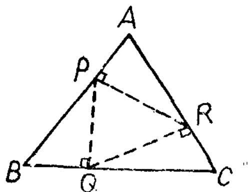
染色问题是组合数学中的一大课题，在许多问题中，为了构造不变量，往往采用染色的方法，就所研究的对象进行分类，每一类就由一种颜色的对象所组成。由于近年来各种数学竞赛中广泛出现这类试题，因而染色问题成为了热门课题，吸引了成千上万的师生去研究它。

一、两种颜色的染色问题

借助两种不同的颜色，将研究的对象分为两类，通过探讨有关性质，进而得出问题的解答，这是我们常常采用的方法。

例 1　（第24届国际竞赛题）

设ABC是等边三角形，E是由线段BC、CA和AB上一切点（包括点A、B、C）所组成的集合。问对E的任一分为两个不相交子集的划分来说，是否至少存在一个子集，其中包含某一直角三角形的三个顶点？证明你的结论。



（图9-1）

证明：借助红、蓝二色，把问题转化为如下形式：将E

中的点染成红色或蓝色，证明一定存在一个直角三角形，三个顶点的颜色相同。

事实上，如图9-1.

在边AB、BC、CA上分别取点P、Q、R使$AP:PB=BQ:QC=CR:RA=2$，则有$PQ\perp AB$，$QR\perp BC$，$RP\perp CA$。

因为点集E中的点染成了红色或蓝色，据抽屉原则知，P、Q、R三点中至少有两点同色，不妨设R、Q为红色.

（1）如果BC边上，除Q点外还有红色点X，那么RQX组成红色顶点的直角三角形.

（2）如果BC边上除Q点外没有红点，则B点为蓝点. 又若AB边上除B点外还有蓝点Y，则作$YM\perp BC$，M为垂足，显然M不同于Q，三角形YBM为蓝色顶点的直角三角形；再若AB边上除B点外都染以红点，这时作$RZ\perp AB$，Z为垂足，则RAZ为红色顶点的直角三角形.

例 2 （第26届国际竞赛题）

n为正整数，整数k与n互素，$0<k<n$，由1，2，…，$(n-1)$组成的集记为M，M中的每个数染上蓝、白二色中的一种，染法如下：

（1）对M中的每个i，i和$(n-i)$同色，

（2）对M中的每个i，$i\neq k$，i和$|i-k|$同色.

求证：M中所有的数必为同色.

证明：若i是整数，记$f(i)$是i被n除后的余数，

$$即i=qn+f(i)，0\leqslant f(i)<n.$$

（其中q是整数，可以是负的）

我们把对M的染色，扩充为对所有整数的染色，方法如

下：

①数0与数k染同色；

②数i与数$f(i)$染同色。

现在证明，这样把染色扩充后，仍满足原题中（1）和（2）的规定。

因为$n-i=n-qn-f(i)=-qn+[n-f(i)]$，

所以$n-i$与$n-f(i)$染同色，按原规定（1），也与$f(i)$染同色，故与i染同色。从而满足原规定（1）。

又因$-i$与$n-(-i)=n+i$染同色，$n+i$与$f(i)$染同色，与i染同色。

$|i-k|=|qn+f(i)-k|=||qn|\pm|f(i)-k||$

所以$|i-k|$与$|f(i)-k|$染同色。按原规定（2），又与$f(i)$染同色，即与i染同色。因此也满足原规定（2）。

由于$-i$与i染同色，因此$i-k$与$k-i$染同色，从而$|i-k|$与$i-k$染同色，即i与$i-k$染同色。

由此推出k，$2k$，$3k$，…，$(n-1)k$都染同色。

因为k与n互素，所以当m取遍1，2，…，$n-1$，$f(k)$，$f(2k)$，…，$f[(n-1)k]$恰是$M=\{1,2,3,\cdots,n-1\}$中$n-1$个不同的数，$f(k)$与k同色，$f(2k)$与$2k$同色，…，因此，$f(k)$，$f(2k)$，…，$f[(n-1)k]$亦都染同色。从而推出M中所有数都染同色。

例3　（第27届国际竞赛题）

平面上有限个点构成一个集合，其中每个点的坐标为整数。可不可以把此集合中某些点染成红色，而其余的点染成白色，使得与纵、横坐标轴平行的任一条直线l上所包含的红、白点的个数至多相差一个？

解：为了叙述方便，我们把与纵、横坐标轴平行的直线分别简称为纵、横线，把符合要求的染色简称为染好色。只有一个点时，显然可以任意染色。也很容易想象可以染好色的其它特例，却很难想象一个反例，因此，我们宁愿猜想问题的答案是肯定的。

题目只问可不可以染好色，并不问怎样染法。不妨假设点数少于n时可以染好色，进而试证n个点也可以染好色。这样，比具体考虑n个点怎样染色可能容易得多。这就是说我们可以用数学归纳法来试证上述猜想。

我们首先注意到一个明显的事实：染好色的纵线或横线上的点如果有偶数个，那就一定是红、白点各占半数；而如果有奇数个点，那就是红点多一个或白点多一个。

于是，我们把可能情况分成两种来考虑。第一是至少有一条纵线或横线l上含有奇数个点，把其中一点p暂时除外，l线上还有偶数个点（包括没有点的情形，下同）；连同其它的点共$n-1$个，按归纳假设可以染好色。这时l上除p外的偶数个点红、白各占半数。如果p所在的另一条线l'（横线或纵线）红点和白点也同样多，p就可以任意染色；如果l'的红（或白）点多一个，p就染白（或红）色。这样，所有n个点都染好色了。

第二种情况是所有纵横线上都含有偶数个点。把一条纵线m上各点暂时除外，其余的点按归纳假设可以染好色。显然全部点数n和除外点数都是偶数，所以这时染色点数也是偶数，并且各纵线（除m外）红、白点同样多，而横线有两种：一种不含有m上的点，所有红白点也同样多，又一种含有m的一个点，其它已染色的点数是奇数，所以红点多一个或白点

多一个，并且红点多的横线和白点多的横线条数相等——因为所有已染色的红、白点数相等。那么，m中在红点多的横线上的点可以染白色，在白点多的横线上m中的点可以染红色。这样，m中红、白点个数也相等，所以n个点就都染好色了。

既然$n=1$时可以染好色，由数学归纳法原理，我们的猜想得到证实。

注：由上面作法可知，题设"其中每个点的坐标为整数"可以省去。

例 4 （首届全国中学生数学冬令营竞赛题）

用任意的方式给平面上的每一个点染上黑色或白色。求证：一定存在一个边长为 1 或$\sqrt{3}$的正三角形，它的三个顶点是同色的。

证明：我们考察平面上任意一条端点不同色的线段AB，设A为黑色，B为白色，以AB为底边作一个腰长为2的等腰三角形ABC（图9—2），则无论C为何色，必有一腰的两端不同色，我们设C为白色，则A和C不同色。

以AC为最长的对角线作一正六边形$ADECFG$，则AC

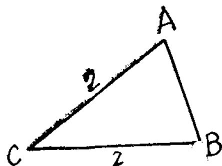


图9—2

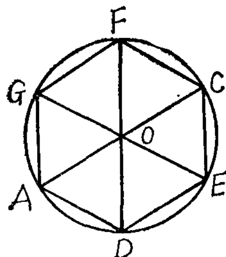


图9—3

的中点必与A、C某点同色，不妨设A为黑色，C为白色，O为黑色。（图9—3）

（1）若正六边形六个顶点与O点连成的六个正三角形中有一个三角形三顶点同色，则本题得证；

（2）若上述六个正三角形没有一个三角形的三个顶点同色，则D和G必为白色，于是C、D、G构成一个以$\sqrt{3}$为边长的正三角形的三顶点，且三顶点同色，则本题也得证。

二、多种颜色的染色问题

例 5 （第28届国际竞赛候选题）

证明：存在一种给集合$M=\{1, 2, \cdots, 1987\}$涂上四色的方法，使得任何一个由M的元素组成的10项等差数列都不是单色的。

证明：集合M涂上4色的方法数等于4^{1987}。设A是由M中的10个元素组成的等差数列的个数，含有一个单色的10个元素组成的等差数列的涂色个数小于$4A\cdot 4^{1987-10}$。如果证得$A\cdot 4^{1987-9}<4^{1987}$，即$A<4^{9}$，则命题的性质得到满足。

事实上，若数列的首项是k，公差为d，则$1\leqslant k\leqslant 1987$

且$d\leqslant\left[\frac{1987-k}{9}\right]$，因此

$$A=\sum_{k=1}^{1987}\left[\frac{1987-k}{9}\right]<\frac{1986+1985+\cdots+9}{9}$$

$$=\frac{1995\cdot 1978}{9}<\frac{2^{10}\cdot 2^{11}}{2^{3}}=4^{9}.$$

这正是所需要的。

注：此例的等价说法为

设$M=\{1, 2, 3, \cdots, 1987\}$. 证明存在着函数$f: M \longrightarrow \{1, 2, 3, 4\}$，它在由$M$的元素组成的任何一个10项等差数列的项构成的集合上不为常数.

例 6 （第12届全俄中学生数学竞赛题）

在无限宽广的方格纸上的每一格，任意涂上给定的$n(n \geqslant 2)$种颜色中的一种.求证：总可找到四个同色的方格，以其中心为某矩形的顶点，且该矩形的边与纸上的方格的边平行.

证明：我们考虑长（横）为充分大，宽（竖）为$n+1$格的水平带状区域，即区域上每一纵列有$n+1$格. 由于给定的颜色为n色，所以每列上出现的颜色不超过n色.根据抽屉原则：每列中同色的方格不少于2个. 由于带状区域的列数是无限的，而且每列格子上涂色的方式却是有限的，因为这种与颜色有关的不同排列是n^{n+1}（每一格子有n种颜色可选择）. 再次根据抽屉原则，于是在$(n+1)\times(n^{n+1}+1)$的方块中一定存在两列的涂色方式是相同的. 因此，可在这两列中找到四个（每列两个）同色的格子，以其中心为顶点的四边形是矩形，且它的边与纸上方格的边平行.

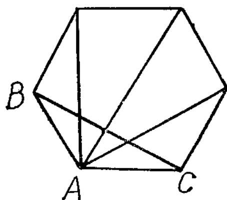
例 7 （第19届全苏中学生竞赛题）

在正n边形中，要求其每条边及每条对角线都染上任一种颜色，使得这些线段中任意两条有公共点的是染不同颜色的. 为此，至少要有几种颜色？

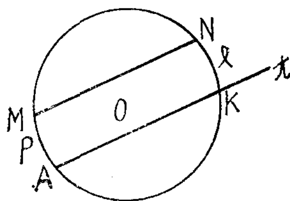
解：如图9-4.

考察正n边形的边AB、AC、对角线BC以及由A引出的所有对角线共有n条线段，其中每两条都有公共点. 于是，它们必须染上不同的颜色，所以需要的颜色不少于n种.

那么，n种颜色是否足够了？当$n=3$时，答案显然是肯定的。当$n>3$时，边和对角线之间有平行的，可以染上相同颜色。如能证明上述n条线段以外的其它边和对角线的每一条都平行于上述n条线段之一，问题也就解决了。



（图9-4）



（图9-5）

事实上，作正n边形的外接圆O（如图9-5）。设MN是另外一条边或对角线。若$MN \parallel BC$，则结论已明；若$MN \nparallel BC$，则过A引直线t平行于MN，交$\odot O$于另一点K（t不能是切线，否则$t \parallel BC$，从而$MN \parallel BC$，矛盾）。于是，$\overset{\frown}{KlN} = \overset{\frown}{ApM}$含有一边所对劣弧的整数倍，所以$K$也是正$n$边形的顶点，即$AK$是由$A$发出的边或对角线。由上可知，$n$种颜色已足够。

三、不变量

所谓不变量，就是描述某系统的状态并在全过程中保持不变的量。由于完全了解这一系统自身的状态的变化过程，一般说来是件复杂事情，有时可以借助不变量的计算来解决问题。

例 8 （第6届国际竞赛题）

17个科学家中的每一个和其他人都通信。在他们的通信

中仅仅讨论三个题目，而任两个科学家仅仅讨论一个题目．证明：其中至少有三个科学家，他们的互相通信中讨论的是同一个题目．

证明：将科学家用点A_0，A_1，…，A_{16}表示．每两点之间连一条棱，如果讨论的是第一个题目，相应的棱染红色，讨论的是第二个题目，则染黄色，第三个题目染蓝色．

自A_0引出的棱有16条，根据抽屉原则，其中至少有六条是同一颜色．设A_0A_1，A_0A_2，A_0A_3，A_0A_4，A_0A_5，A_0A_6为红色．

考虑以A_1，A_2，A_3，A_4，A_5，A_6为顶点的所有的棱，如果有一条是红色的，比如A_1A_2是红色的，则A_0，A_1，A_2三人讨论的是同一个题目；如果A_iA_j($1\leqslant i<j\leqslant 6$)中没有一条边是红色的，问题就变为："如果六个点间的所有棱用黄、蓝二色去染，则一定有一个同色的三角形"，亦即三人讨论同一个题目．

在A_1A_2，A_1A_3，A_1A_4，A_1A_5，A_1A_6这五条棱中，由于只有两种颜色，则至少有三条棱的颜色相同，设A_1A_2，A_1A_3，A_1A_4染有黄色，若在A_2A_3，A_2A_4，A_3A_4三条棱中如有一条是黄色，则完成证明；若都为蓝色，则$\triangle A_2A_3A_4$为蓝色三角形，亦证明了命题的结论．

例 9　（第21届国际竞赛题）

一棱柱以五边形$A_1A_2A_3A_4A_5$与$B_1B_2B_3B_4B_5$为上、下底，这两个多边形的每一条边及每一条线段A_iB_j(i，$j=1,2,3,4,5$)均涂上红色或绿色．每一个棱柱顶点为顶点的、以已涂色的线段为边的三角形均有两条边颜色不同．证明：上、下底10条边颜色一定相同．

证明：首先证明上底的五条边颜色完全相同。

如果上底的五条边颜色不完全相同，那么必有两条相邻的边颜色不同，不妨设A_1A_2是绿色的，A_1A_5是红色的。

自A_1引出五条线段A_1B_1，A_1B_2，A_1B_3，A_1B_4，A_1B_5中，至少有三条有相同的颜色，这三条线段的端点B_j中必有两个相邻，不妨设A_1B_1，A_1B_2均为绿色，那么B_1B_2必为红色。但由$\triangle B_1A_1A_2$推出A_2B_1为红色，由$\triangle B_2A_1A_2$推出A_2B_2也为红色，这时得$\triangle A_2B_1B_2$的三条边都是红色的，与已知条件矛盾。这就证明了上底的五条边的颜色必相同。

同理可证下底的五条边的颜色也相同。

现在来证明：上、下底的颜色必须是同样的。

否则，上、下底的颜色不同。不妨设上底的五条边全是绿色，下底的五条边全为红色。

前述中设A_1B_1、A_1B_2颜色相同，由于B_1B_2是红色的，A_1B_1、A_1B_2都必须是绿色的，与前面的证明完全一样，$\triangle B_1A_1A_2$，$\triangle B_2A_1A_2$、$\triangle A_2B_1B_2$中必有一个三条边是同一颜色的三角形，而与已知条件矛盾。

所以，上、下底10条边的颜色一定相同。

例10 （第二届东北三省数学邀请赛试题）

有1987片玻璃片，每片上涂有红、黄、蓝三色之一，进行下列操作：将不同颜色的两块玻璃片擦净，然后涂上第三种颜色（例如将一块蓝玻璃片和一块红玻璃片上的红色与蓝色擦掉，然后在两片上涂上黄色）。证明：(1)无论开始时红、黄、蓝色玻璃片各有多少片，总可以经过有限次操作而使所有的玻璃片涂有同一种颜色；(2)最后变成哪一种颜色，与操作顺序无关。

解：设红片、黄片和蓝片的数目分别为x、y、z.x,y,z被 3 除后的余数中必有两个是相等的.

事实上，不妨设$x=3a+1$，$y=3b+2$，$z=3c$，a,b,c为整数；又$x+y+z=3(a+b+c+1)\neq 1987$,显然是矛盾的.这说明了$x$，$y$，$z$可由下式表示(这里可假设$y$，$z$是除3同余的)：

$$x=3a+m,\qquad y=3b+n,\qquad z=3c+n.$$

比较一下y和z的大小，不妨设$c\geqslant b$.

若 $c=b$，本题得证.

若$c>b$，于是取黄片$3b+n$，取蓝片$3b+n$，按规则操作得证片数为$3a+6b+m+2n$，黄片为零，蓝片为$3(c-b)$.

接着，各取红片、蓝片 1，产生 2 片黄片；再各取蓝片、黄片 2，产生 4 片红片；于是红片数为$3a+6b+m+2n+3$，黄片为零，蓝片为$3(c-b-1)$.如果$c-b-1=0$本题得证，否则类似再操作k次，直至$c-b-1-k=0$.

最后，所有玻璃片都涂上了红色.

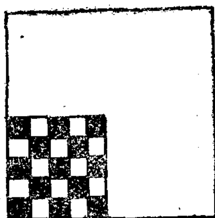
很明显，最后产生1987个红片，不是偶然的，完全是因为红片数除以 3 的余数和别的色片数的不同,不论如何操作，都不可能改变三者的余数之间的关系，即两个相等而异于第三个，故最后变成哪一种颜色，与操作顺序无关.

例11 （88年四川省竞赛题）

给定一个由16×16个小正方形拼成的棋盘形方格，这些小正方形的颜色黑白相间(图9-6)

现定义一种运算A：把位于第i行的所有小正方形和位于第j列的所有小正方形都换成相反的颜色，即黑色的小正方形换成白色的，白色的小正方形换成黑色的，这里，$1\leqslant$

i，$j\leqslant16$．我们把A称为在位于第i行第j列上的小正方形上的一次运算．



（图9-6）

试问：能否经过若干次上述运算把棋盘上的所有小正方形全部换成同一种颜色？证明你的结论．

解：在原棋盘格上的每一个小黑正方形处（即图中$i+j$＝偶数的小正方形处）各进行一次上述运算，就可把所有小正方形都换成白色的．或在原棋盘格上的每一个小白正方形处(即图中$i+j$＝奇数的小正方形处)各进行一次上述运算，就可把所有小正方形都换成黑色的．

事实上，设S_{ij}为位于第i行第j列的小正方形．

（1）若S_{ij}为黑色的，除S_{ij}外，位于第i行和位于第j列的小黑正方形各有7个，加上S_{ij}本身，共有15个．由于在这15个小黑正方形上的每一次运算都改变一次S_{ij}的颜色，所以S_{ij}共改变了15次颜色，最后变成白色的．

（2）若S_{ij}为白色的，则位于第i行和位于第j列的小黑正方形各有8个，共有16个．由于在这16个小黑正方形上的每一次运算都改变一次S_{ij}的颜色，所以S_{ij}共改变了16次颜色，最后仍为白色的．

注：此试题可以推广到$2n\times2n$个小正方形的情形．

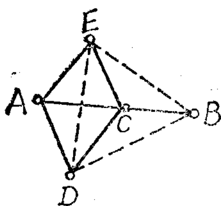
例12　（第12届全俄中学生竞赛题）

平面上的每点都染上两种颜色中的一种．已知任一边长为1的正三角形都有两种颜色的顶点．(1) 证明：可求得边长

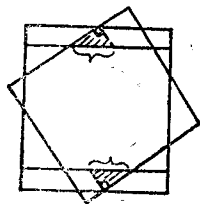
为$\sqrt{3}$的正三角形，其顶点是同色的；(2) 举出染色满足题设要求的平面的例子。

(1) **证明**：取线段AB的长度为2，且两端点是不同颜色的。这样的线段是存在的。否则，以任意点O为心，2为半径的所有圆周α上的点将都与O点同色。再考虑以圆周α上的点为心，2为半径的所有圆周上的点将与O点同色。于是得到以O为中心、4为半径的圆面上各点都同色，这与任一边长为1的正三角形都有两种颜色的顶点相矛盾。今设AB的中点为C，不妨设它与A同色，作正$\triangle ACD$和正$\triangle ACE$（图9－7）。由题设D、E不能与A、C同色。那么它们将与B同色。于是$\triangle BDE$是顶点同色、边长为$\sqrt{3}$的正三角形。

(2) **解答**：将平面分成宽度为$\frac{\sqrt{3}}{2}$的水平带状区域，且每区域含下沿不含上沿。让相邻的带状区域染上不同的颜色即可。



（图9—7）


（图9—8）

例13 （第20届全苏中学生竞赛题）

两个同样大小的正方形相交错，（其公共部分）构成一个八边形。一个正方形的边是蓝色的，另一个正方形的边是红色的。证明：八边形中蓝色的边长之和等于它的红色的边长

之和.

证法一、先考虑两个正方形中心重合的情况. 这时，所构成的八边形外切于以它们的中心为圆心、正方形一边长度之半为半径长的圆. 再由切线长定理易推得结论.

我们总可以将其中的一个正方形经平移后，使得两正方形的中心相重合. 而这个平移变换又可由两次这样的移动来替代：先沿着被移动的正方形一边的方向平移，然后再沿着与该边垂直的另一边的方向平移.

因此，只要证明：当沿着红色正方形的一边方向移动红色正方形时，所交成的八边形的“红边”之和不变.

如图9—8，设水平位置放置的是红色的正方形. 当红色正方形沿其垂直方向的边向上移动时，八边形（平行于移动方向）的两条红边的长度不改变，(上方)第三条红边长度减少的数量等于图中上方带阴影的直角三角形斜边的长度；而(下方)第四条红边长度增加了相同的数量. （显然，带阴影的直角三角形的各角分别对应相等，且斜边上的高也相等，易证此两三角形全等.）所以，在移动时，八边形的四条红边之和不变.

证法二、设水平位置放置的正方形$ABCD$是红色的，斜置的正方形$A_1B_1C_1D_1$是蓝色的. 如图9—9.

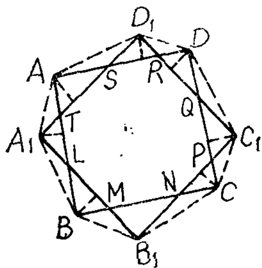


图9-9

容易发现直角三角形ATS、BML、CPN、DRQ、A_1TL、B_1MN、C_1PQ、D_1RS都是相似的. 分别由这些直

角三角形的直角顶点作斜边上的高（斜边是红色的，对应的叫红色高线；斜边是蓝色的，对应的叫蓝色高线）.注意到相似三角形对应线段之比相等，以及利用等比定理，易证

红边之和:红色高线之和

=蓝边之和:蓝色高线之和

（这里，红边、蓝边皆指八边形$LMNPQRST$的边）所以要证本题，只须证红色高线之和等于蓝色高线之和．为此，只要证明：三角形AA_1B、BB_1C、CC_1D、DD_1A的面积之和等于三角形A_1BB_1、B_1CC_1、C_1DD_1、D_1AA_1的面积之和，这是显然的．因为它们都等于八边形$AA_1BB_1CC_1DD_1$与一个正方形的面积之差．

四、其他染色问题

例14 （第18届全苏中学生竞赛题）

有一个立方体，并有两种颜色：红色和绿色．两个人做游戏：第一人先选取立方体上的三条棱，并将其涂成红色．接着，他的对手选另三条棱，并将其涂成绿色．继而第一人再在尚未着色的棱中再选三条并涂成红色；他的对手接着再将另三条棱涂成绿色．对任一条棱，不许重复涂同一颜色或改涂另外的颜色．谁要是在任一面的所有棱涂上自己的颜色，就算谁胜．试问：第一人如果采取正确的策略，他是否必能获胜？

解：为了使第一人不能获胜，其对手只须在立方体的三条两两异面的棱涂上绿色，这时在六个面上都有一条棱涂成绿色了．第一人的策略是要破坏其对手的这种企图，但是办不到．事实上，每条棱都在两个两两异面的“三棱组”中．考

虑立方体中一个确定的面，它有四条棱，因此不同的两两异面的"三棱组"共有 8 组，而第一人可选棱数是 3，他第一步能"控制"的"三棱组"不超过 6 组，所以没有必胜的策略。

例15 （第19届全苏中学生竞赛题）

在平面上画出$n(n\geqslant 2)$条直线，将平面分成若干个区域。在其中的一些区域上涂了颜色，并且任何两个涂色的区域不能有相邻接的边界（注：只有一个公共点的两个区域，不认为是有相邻接边界的）。证明：涂色的区域数不超过$\frac{1}{3}(n^2+n)$。

证明：如果所画的直线都互相平行，那么它们将平面分成$(n+1)$个区域。这时能涂色的区域不超过n个。因为

$$\frac{1}{3}(n^2+n)=\frac{1}{3}n(n+1)\geqslant\frac{1}{3}n(2+1)=n,$$

所以在这种情况下，命题成立。

今设并非所有的直线都互相平行。每个区域的边界是由若干条位于不同直线上的线段或射线所组成的。这些线段和射线称为区域的边，每个区域的边数不少于 2。用m_2表示有两条边的涂色区域的个数；m_3表示有三条边的涂色区域的个数，等等。我们用m_k表示边数最多的涂色区域的个数。

首先证明$m_2\leqslant n$。任何有两条边的区域的边界是由两条射线组成的，并且每条射线只能是一个涂色区域的边界。所有这样的射线不超过$2n$条（每条直线上的射线不超过两条）。所以有两条边的涂色区域的边数不超过$2n$，或者说，$m_2\leqslant n$。n条直线中的每一条被分成的区间（线段或射线）数不多于n，所以，所有的区间数不超过n^2，因而所有区域边的总数也就

不超过n^2条. 由于每个区间至多是一个涂色区域的边，所以

$$2m_2+3m_3+\cdots+km_k\leqslant n^2.$$

涂色的区域数为$m_2+m_3+\cdots+m_k$，利用上述不等式，得

$$m_2+m_3+\cdots+m_k$$

$$\leqslant\frac{1}{3}m_2+\frac{1}{3}(2m_2+3m_3+\cdots+km_k)$$

$$\leqslant\frac{1}{3}n+\frac{1}{3}n^2=\frac{1}{3}(n^2+n).$$

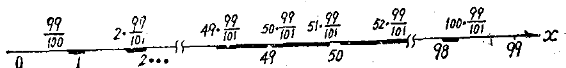
例16 （第20届全苏中学生竞赛题）

一个长方形用平行于边的直线分割成边长为1的小正方形，并象国际象棋盘那样涂成黑白格. 长方形的对角线也被分成黑白相间的线段. 如果长方形的尺寸为(1) 100×99，(2) 101×99，求白色线段长度之和与黑色线段长度之和的比.

解：(1) 将长方形的对角线绕其中心旋转180°后与自身重合，但各段上所涂的颜色恰相反，所以白色线段长度之和与黑色线段长度之和的比为1.

(2) 将给定的长方形$ABCD$置于直角坐标系中，使得各顶点坐标为：$A(0,0)$、$B(0,101)$、$C(99,101)$、$D(99,0)$. 为确定起见，设以A为顶点的小正方形涂成白色. 因99与101互素，所以对角线AC不通过(除A和C外)各小正方形的顶点. 因此，AC和小正方形边的交点两侧，对角线改变颜色. 我们将这些线段的长度比转化为它们在Ox轴上射影长度之比. AC在Ox轴上的射影是线段AD、AC与小正方形水平方向边的交点的射影是形如$(99m/101, 0)$，$m=0$，

1，2，…，101的点；而AC与小正方形垂直方向边的交点的射影是形如$(n, 0)$，$n=0, 1, 2, \cdots, 99$的点．因为$m-1<\frac{99m}{101}<m$（当$1\leqslant m\leqslant 50$时）及$m-2<\frac{99m}{101}<m-1$（当$51\leqslant m\leqslant 100$时），所以点$(99m/101, 0)$与$(m, 0)$，$m=1, 2, \cdots, 49$依次交替出现，然后是点$(99\cdot 50/101, 0)$，再是点$(99m/101, 0)$和$(m-1, 0)$，$m=51, 52, \cdots, 100$依次交替出现（如图9－10）



（图9－10）

白色线段的射影长之和为

$$\frac{99}{101}+\left(\frac{2\cdot 99}{101}-1\right)+\cdots+\left(\frac{50\cdot 99}{101}-49\right)$$

$$+\left(50-\frac{51\cdot 99}{101}\right)+\cdots+\left(99-\frac{100\cdot 99}{101}\right)=\frac{5000}{101},$$

黑色线段的射影长之和为

$$99-\frac{5000}{101}=\frac{4999}{101}.$$

所以要求比值为5000:4999．

例17 （第12届全俄中学生数学竞赛题）

沿圆周按某种次序排列15个黑的和15个白的筹码．每一步允许交换任意两个筹码的位置．从筹码的任一初始排列开

始，变换为相邻筹码各不同色．试问要怎样用最少的步数来完成？

解：按顺时针方向依次将筹码编为1，2，…，30号．不失一般性，可认为在15个偶数号的筹码中白筹不多于7个，那么奇数号的筹码中也有同样多的黑筹．今将偶数号中的白筹与奇数号中的黑筹的位置每次调换一对，于是便可达到题设的要求，这样做一定不多于7步．仅当15个白筹及15个黑筹分别连成一片时，才要经历7步达到要求．

第　十　讲

关于覆盖问题

覆盖是组合几何的典型课题，它主要涉及两方面的内容：一是覆盖或嵌入；二是以覆盖为手段来解决一些组合几何中的问题。由于覆盖问题新奇而有趣，是一种很好的“锻练思维的体操”，所以在国内外数学竞赛中常有关于覆盖的试题。

一、基本概念

假设G与F是两个平面图形，如果F的每一点都属于G，我们就说图形G覆盖图形F。

一般地，如果图形F的每一点都必属于n个图形G_1，G_2，…，G_n中的某一个，也即是这n个图形G_1，G_2，…，G_n的“并”包含了图形F，我们就说图形F被这n个图形G_1，G_2，…，G_n所覆盖。如果图形G_1，G_2，…，G_n不相交（即没有公共内点），而且它们的“并”与F重合，那么就说图形F被图形G_1，G_2，…，G_n铺满，或说可以由图形G_1，G_2，…，G_n拼成图形F。

由于一个平面图形就是一个平面点集，所以，图形的覆盖问题，实质上就是平面点集的包含问题。因此，为了方便起见，我们把图形G覆盖图形F，简记为$G\supseteq F$；图形G不覆

盖F（即图形F中至少有一点不属于G），简记为$G \not\supset F$。

在试题中涉及到的平面图形，大多是平面区域，也就是由一条封闭曲线l所包围的一部分平面，l叫做该区域的边界，包含边界的区域叫做闭区域，区域中的点叫做区域的内点。下面提及的区域均指闭区域。试题中出现的所谓"硬纸片"，就是指经过运动变换以后不改变其形状和大小的平面区域。如果"硬纸片"G经过一个运动变为G'，而G'覆盖图形F，我们就说G能够覆盖图形F；在相反情形下，就说G不能覆盖图形F。当G能够覆盖图形F时，我们也说图形F能够嵌入图形G中；反之，则说图形F不能嵌入G中。

如果图形F中任意两点间的距离的最大值存在，这个最大值就叫做图形F的直径，记为$d(F)$。例如，以1为半径的圆的直径是2，该圆确定的区域的直径也是2；又如，边长为1的正三角形的直径是1，它的三个顶点组成的点集的直径也是1，而它的外接圆的直径却是$\frac{2\sqrt{3}}{3}$。

一个平面图形，如果在包含任何两个点的同时，还包含了连接这两点的线段，则称这个图形是凸的。例如：线段、射线、圆、三角形、夹在两平行线间的带形区域、从一点出发的两条射线间的平面部分构成的角形区域等等都是凸图形。显然，两个凸图形的公共部分仍是凸图形。

二、基本原则

原则一 假设G与F都是平面区域，如果G能覆盖F，那么G的面积必大于或等于F的面积。

原则二 （面积重叠原则）。假设平面上有n个区域，它们

的面积分别为A_1，A_2，…，A_n，如果将它们按任何一种方式放在一个面积为A的区域的内部，那么当$\sum_{i=1}^{n} A_i > A$时，在$A_i(i=1, 2, \cdots, n)$中至少有两个区域要发生重叠．

原则三 一个直径为d的点集F不能被直径小于d的区域G所覆盖．

原则四 如果能在平面上找到一点O，使点集F中的每一点与点O的距离都不大于r，则F必能被一个以点O为圆心，以r为半径的圆形区域所覆盖．

原则五 （海莱定理）．假设在平面上给定了有限多个凸图形，如果其中任何三个凸图形包含有公共点，那么至少存在一个点，它同时属于所有这些图形．

上述原则一至四的正确性是显然的，下面给出原则五的证明过程：

首先考虑凸图形的个数为4的情形．

假设F_1，F_2，F_3，F_4均是凸图形，P_1，P_2，P_3，P_4分别是F_2，F_3，F_4；F_1，F_3，F_4；F_1，F_2，F_4；F_1，F_2，F_3的公共点，且$P_i \notin F_i$（$i=1, 2, 3, 4$），显然F_1包含有P_2，P_3，P_4三点．因此它必包含$\triangle P_2P_3P_4$（也可能蜕化为线段）．同理，F_2包含$\triangle P_1P_3P_4$，F_3包含$\triangle P_1P_2P_4$，F_4包含$\triangle P_1P_2P_3$．容易证明，在平面上可以找到一点P，同时属于这四个三角形，所以点P同时属于F_1，F_2，F_3和F_4．

接着再考虑凸图形的个数大于4的情形．

假若命题对n个凸图形F_1，F_2，…，F_n而言是正确的，则对任何三个凸图形都包含有公共点的$n+1$个凸图形F_1，F_2，…，F_n，F_{n+1}，本命题仍然成立．事实上，

设F表示F_n与F_{n+1}的公共部分，则n个图形F_1，F_2，…，F_{n-1}，F都是凸的，而且其中任何三个图形都有公共点，所以这n个图形至少包含一个公共点P，从而这$n+1$个凸图形F_1，F_2，…，F_n，F_{n+1}包含公共点P。

综上所述，得知对于任意有很多个凸图形而言，命题的结论都是正确的。

在这里，值得一提的是，在解答有关问题中，不是直接应用海莱定理，而是应用它的等价命题：

原则六 如果点集F_1，F_2，…，F_n（$n\geqslant3$）覆盖全平面，并且它们的补集$\overline{F_1}$，$\overline{F_2}$，…，$\overline{F_n}$都是凸集，那么可以从F_1，F_2，…，F_n中选出三个点集，仍要覆盖全平面。

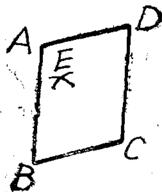
三、试题选解

例1 （第9届国际竞赛题）

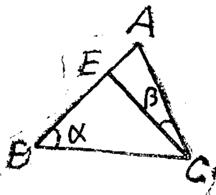
在一个平行四边形$ABCD$中，$AB=a$，$AD=1$，$\angle ABC=\alpha$，$\triangle ABC$是锐角三角形。试证明：当且仅当$a\leqslant\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha$时，以$A$、$B$、$C$、$D$为圆心，半径为1的四个圆$K_A$、$K_B$、$K_C$、$K_D$能覆盖该平行四边形。

证明：首先假设$\alpha\geqslant60°$。

若E是K_B和K_C的交点，则$\angle CBE=60°$。若以B为原



（图10-1）



（图10-2）

点，BC为x轴，$BC=1$，建立平面直角坐标系，则点A的坐标为$(a\cos\alpha, a\sin\alpha)$，$E$点的坐标为$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. 这时，四个圆能盖住平行四边形的充要条件是$AE\leqslant1$. 由

$$AE^2=\left(a\cos\alpha-\frac{1}{2}\right)^2+\left(a\sin\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=1+a^2-a(\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha).$$

因而$AE\leqslant1$等价于

$$a^2\leqslant a(\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha),$$

即 $$a\leqslant\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha.$$

再假设$\alpha<60^\circ$.

显然K_B与K_C的交点E在平行四边形之外，此时四个圆一定盖住平行四边形. 并且

$$a=\cos\alpha+\sin\alpha\operatorname{tg}\beta<\cos\alpha+\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha$$
$$<\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha.$$

综上所述，在所给条件下，四个圆能覆盖该平行四边形的充要条件是

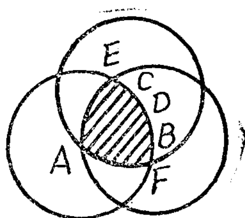
$$a\leqslant\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha.$$

例2 （第7届国际竞赛题）

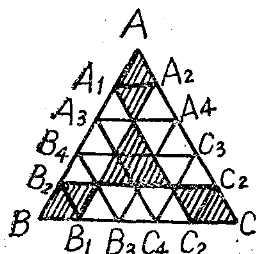
在平面上给出$n(\geqslant3)$点，其中任两点的距离最大为d. 距离为d的两点间的联线段叫这一组点的直径. 证明：直径的数目至多n条.

证明： 假定有n个点，其直径多于n条. 如果有某个点出发的直径少于两条，我们就把这点除去，剩下的$n-1$个点至少有n条直径. 显然$n-1\geqslant3$. 故此不妨假设从每一点都至少引出2条直径.

因为直径数目比点多，所以至少有一点A引出三条直径AB、AC、AD，每两条直径的夹角不超过60°，否则就有大于d的联线段．不妨设AD在AB与AC之间，因此，⊙(A, d)，⊙(B, d)，⊙(C, d)的公共部分覆盖了整个点集，显然与D距离为d的点只有A点一个，即D点只引出一条直径，这与前面的假设矛盾．因而本题得证．



（图10-3）



（图10-4）

例3 （第二届全国中学生数学冬令营试题）

在一个面积为 1 的正三角形内部，任意放五个点．试证：在此正三角形内，一定可以作三个正三角形盖住这五个点，这三个正三角形的各边分别平行于原三角形的边，并且它们的面积之和不超过0.64．

证法一 因为放置的五个点在正三角形的内部，因此可作一个完全含于原三角形内的正三角形，同时还将那五个点包含在内部．将此三角形记为ABC．

将ABC的各边五等分．过分点作平行于其余二边的直线，这些直线将ABC分成许多小三角形，它们是全等的正三角形，每一个的面积小于$\frac{1}{25}$（如图10-4）

考察以各顶点为一顶点的菱形(图中画了阴影的菱形)。靠A的那个菱形，我们简称菱形A，如此等等。

(1) 如果有一个菱形中不含那五点中的任何一个，例如说菱形A不含任何一点，这说明正三角形A_1BC_2及A_2B_1C完全盖住了五个点。因此，其中有一三角形，例如说A_1BC_2，至少盖住了三个点。这三角形由16个小三角形组成，因此它的面积小于$16\times\frac{1}{25}=0.64$。其余二点(如果还有的话)，各可用一个面积充分小的正三角形盖住，以致于这三个正三角形的面积之和仍小于0.64。

(2) 今设这三个菱形中均含有五点中的点。因此，五点中至多还有两点在它们之外。

若有一个菱形（例如菱形A）含三个或三个以上的点，那么用一个由四个小三角形所组成的正三角形就可把这些点盖住，其面积小于$4\times\frac{1}{25}=0.16$，其余二点（如果存在）便可用面积充分小的正三角形盖住。

如果有二个菱形中，各含二个或二个以上的点，这时，两个正三角形便可盖住四个或四个以上的点。这两个正三角形的面积小于$\frac{4}{25}+\frac{4}{25}=\frac{8}{25}=0.32$，其余那一个点（如果存在的话）可用一个充分小的三角形盖住。

如果菱形A中含两点，而菱形B与C中各恰含一点。

图中有三个等腰梯形（即未画阴影的部分）。这三个梯形中，我们看靠在BC边上的那一个。如果第五点不在此梯形中，那么$\triangle AB_2C_1$中含三个点，这三角形的面积小于$16\times$

$\frac{1}{25}=0.64$，其余二点可用充分小的正三角形盖住。如果第五点在此梯形内，于是正三角形A_3BC_4或A_4B_3C盖着两个点，它的面积$<\frac{9}{25}$；另外，正三角形AA_3A_4盖着二点，此三角形面积$<\frac{4}{25}$，此两个正三角形面积$<\frac{13}{25}<0.64$。可画一个充分小的正三角形再把菱形C中的那一点盖住。

最后，设菱形A、B、C中各只含一个点；其余二点只能至多出现在两个等腰梯形中，无妨设最下面的那一个不含这二点，因此这二点连同菱形A中的那一点必含于正三角形AB_2C_1之中，这又归结为前面已经出现过的情况。

以上讨论，穷尽了各种各样的情况，因而本题得证。

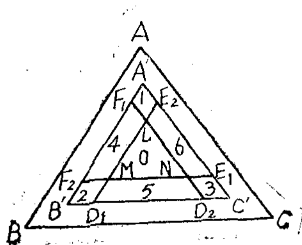
证法二 以α_1、α_2、α_3记所作的三个正三角形，其面积记为S_1、S_2、S_3.因为所放五点均在原三角形(记为$\triangle ABC$)的内部，故可以$\triangle ABC$的中心为中心，在$\triangle ABC$的内部作它的位似三角形$A'B'C'$,使得所放五点仍在$\triangle A'B'C'$内部。$\triangle A'B'C'$可认为是$\triangle ABC$收缩而成。$\triangle A'B'C'$的面积为S，$S=1-\varepsilon$，$0<\varepsilon<1$。

把$\triangle A'B'C'$三边五等分，第1，4分点依次为D_1，D_2，E_1，E_2，F_1，F_2，如图10-5。连D_1E_2，E_1F_2，F_1D_2，交于L、M、N，分$\triangle A'B'C'$为七部分。记为小三角形π_0，菱形π_1，π_2，π_3，梯形π_4，π_5，π_6。

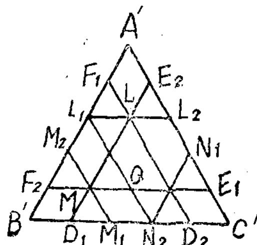
(1) 若有一菱形(如为π_1)没放进点，则$\pi_2\cup\pi_4$与$\pi_3\cup\pi_6$中必有一区域(如为$\pi_2\cup\pi_4$)最多放进两点，显然可作α_1，α_2盖住这至多两个点，且其面积可任意适当选取，不妨使$S_1=$

$S_2=\delta=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^2\varepsilon$；$\alpha_3$令为$\triangle C'E_2D_1$，则$S_3=\left(\frac{4}{5}\right)^2 S$。从而$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$满足要求(即盖住了五点，且三个正三角形的各边分别平行于原三角形的边)，且

$$S_1+S_2+S_3=\left(\frac{4}{5}\right)^2\varepsilon+\left(\frac{4}{5}\right)^2 S=\left(\frac{4}{5}\right)^2=0.64.$$



(图10-5)



(图10-6)

(2) 若每一菱形都放进点，而其余区域均没放进点，令$\triangle A'B'C'$各边的第2，3分点依次为L_1，M_2，M_1，N_2，N_1，L_2，则$\triangle A'L_1L_2$，$\triangle B'M_1M_2$，$\triangle C'N_1N_2$可作为α_1，α_2，α_3，显然满足要求，且

$$S_1+S_2+S_3=3\left(\frac{2}{5}\right)^2 S$$

$$<\left(\frac{4}{5}\right)^2 S<\left(\frac{4}{5}\right)^2=0.64.$$

(3) 若每一菱形均放进点，而其余区域只放进一点P，则不妨设π_1中放进2点，π_2，π_3中各放进一点。

(i) P落入$\pi_4 \cup \pi_0 \cup \pi_6$中，则以$\triangle A'F_2E_1$为$\alpha_3$，情况类似于(1)，同理得证.

(ii) P落入π_5中，不妨设落入π_5的左半部. 设MN的中点为Q，过Q作AC的平行线，交$B'C'$于N_2，交$A'B'$于L_1，显然可作α_1盖住π_5中的一点，使$S_1 = \delta = \left(\frac{1}{5}\right)^2 S$；令$\alpha_2$为$\triangle A'L_1L_2$，$\alpha_3$为$\triangle B'N_2F$，则$\alpha_2$盖住了$\pi_1$中的两点，$\alpha_3$盖住了$\pi_2$中的一点和点$P$，$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$符合要求，且

$$S_1 + S_2 + S_3 = \left[\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2\right] S$$

$$< \left(\frac{4}{5}\right)^2 S < \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 0.64.$$

(4) 若每一菱形均放进点，而其余区域也放进两点P、Q，则π_1，π_2，π_3中各放进一点，而三个梯形中至少有一(如为π_4)没放进点，则以$\triangle C'D_1E_2$为α_3，情况类似于(1)，同理得证.

综上可知，本题结论成立.

例 4 (85年长沙市数学选拔赛试题)

试证明：凡属周长为P，且面积为S的凸n边形都可以盖住一个半径为$\frac{S}{P}$的圆.

证明：从凸n边形的一边开始，按逆时针方向的顺序，设各边之长依次为a_1，a_2，a_3，…，a_n，则$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = P$. 如果以$\frac{S}{P}$为高，并分别以$a_1$，$a_2$，…，$a_n$为底边长，在平面内作出没有重迭部分的$n$个矩形，则此$n$个矩形的面积之和显

然等于凸n边形的面积S。现在以$\frac{S}{P}$为高，并分别以凸n边形的各边为底边，在凸n边形内作出定位的n个矩形，则每相邻位置的两个矩形存在重迭部分，从而这样定位的n个矩形不能盖住这个凸n边形。显然，这个凸n边形未被盖住的区域内的任一点到凸n边形各边的距离都小于$\frac{S}{P}$。故以凸n边形未被盖住的任一点为圆心，以$\frac{S}{P}$为半径的圆被这个凸n边形所包围，从而命题得证。

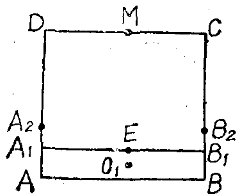
例5 （83年瑞典奥林匹克试题）

一个单位正方形被三个相等的圆盘所覆盖，

(a) 证明存在半径$\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$的三个相等的圆盘覆盖该正方形。

(b) 求最小可能的半径。

解：首先证明用半径为$r=\frac{\sqrt{65}}{16}<\frac{\sqrt{2}}{2}$的三个圆盘可以覆盖该正方形。



（图10-7）

设$ABCD$是单位正方形，取

$$AA_1=A_1A_2=BB_1=B_1B_2=\frac{1}{8},$$

M、E分别为DC、A_1B_1的中点，O_1为AB_1与A_1B的交点。

$$BO_1=\frac{1}{2}\sqrt{1+\left(\frac{1}{8}\right)^2}=\frac{\sqrt{65}}{16}=r,$$

$$MA_1=MB_1=\sqrt{\frac{1}{4}+\left(1-\frac{1}{8}\right)^2}=\frac{\sqrt{65}}{8}=2r.$$

因而，以O_1为心r为半径的圆盘覆盖了矩形AA_1B_1B，而以MA_1和MB_1为直径的圆O_2，O_3分别覆盖了矩形$DMEA_1$和$CMEB_1$，于是以半径为r的三个圆盘O_1，O_2，O_3覆盖了整个正方形$ABCD$。

再证任意半径为$r'<\frac{\sqrt{65}}{16}=r$的三个圆盘不能覆盖$ABCD$。由于四个顶点至少有两个相邻顶点在同一圆盘中，不妨设A，$B\in O_1$，由于$r'<r$，因而$\overline{A_1D}$，$\overline{DC}$，$\overline{B_1C}$都不在O_1中。下面分两种情况加以讨论：

(1) 若D、C同时属于一个圆盘，不妨设D，$C\in O_2$，但此时，$\overline{A_1A_2}$，$\overline{B_1B_2}\notin O_2$，而$O_3$不能同时包含$A_1$，$B_2$两点，因此，这种情况不可能覆盖$ABCD$。

(2) 若$D\in O_2$，$C\in O_3$，但由于O_2和O_3都同时覆盖M，A_1，A_2三点中任意两点，因而这三点中至少有一点不能被覆盖。

这就证明了半径为$r'<r$的三圆盘不能覆盖正方形$ABCD$。

例 6 （第12届全俄中学生数学竞赛题）

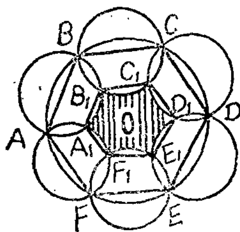
在长方形的桌面上不重迭地放着25枚硬币，使得不能再放上一枚而与已放的不重迭．证明：假设允许重迭放置，那末只要用100枚这样的硬币便可覆盖全桌面．（硬币是圆形的且半径相等．放置时，硬币可露出桌面的边缘，但其重心必须在桌面内．所谓“覆盖全桌面”，指的是桌面的每点必处在所放的某个硬币之下．）

证明：由题设25枚硬币放置的方式，可知桌面上每点总与某枚硬币的中心之距离小于硬币的直径。设想将桌子和硬币的尺寸(长度)都缩小一半，所“得到”的桌子面积为原桌子的$\frac{1}{4}$(称为小桌子)。在小桌子上放着25枚半径为原来的$\frac{1}{2}$的硬币(称为小硬币)，并且小桌子上的每点总与某枚小硬币的中心之距离小于硬币(注意：不是小硬币)的半径。现在如果不改变小硬币中心在小桌子上的位置，而将其半径增大一倍(即“变”为原来的硬币)，那么这25枚硬币将覆盖小桌子，即25枚硬币可覆盖$\frac{1}{4}$张桌面，所以100枚硬币便可覆盖全桌面。

例 7 (第三阶段全俄中学生数学竞赛试题)

至少要用多少个半径为 1 的圆，才能完全覆盖一个半径为 2 的圆？(这些圆可彼此相迭，也可以越出大圆的边缘。)

解．如图10-8.



(图10-8)

设O点是半径为 2 的圆的中心，$ABCDEF$是圆O的内接正六边形，则其边长为 2．以这六边形的各边中点为圆心，1 为半径作六个圆，这些圆周分别相交于点A、B、C、D、E、F以及点A_1、B_1、C_1、D_1、E_1、F_1．后六点恰是边长为 1 的正六边形的顶点．(事实上，这六点就是将圆O六等分的六条半径的中点．)所作的这六个圆只能覆盖半径为 2 的圆的一部分，如图中的阴影部分的图形则未被覆盖．容易

看出：这部分只要用圆心在O点、半径为 1 的一个圆便可将其覆盖．因此，用七个半径为 1 的圆可将一个半径为 2 的圆完全覆盖．

现在要证明：用六个半径为 1 的圆是无法将半径为 2 的圆完全覆盖的．因为一个半径为 1 的圆至多只能覆盖半径为 2 的圆周的$\frac{1}{6}$．(若小圆的圆心不在大圆的某内接正六边形的边的中点时，则小圆与大圆的两个交点的连线只是小圆的非直径的弦，从而覆盖大圆的圆周将小于$\frac{1}{6}$．)所以，如果半径为1的圆少于六个时，半径为 2 的圆周将不能被完全覆盖．同时，上图是半径为2的圆周被六个半径为 1 的圆完全覆盖的唯一方式，而这时点O未被覆盖．所以至少要用七个半径为 1 的圆才能将半径为 2 的圆完全覆盖．

第十一讲

努力探索，作好参赛准备

众所周知，数学竞赛不同于高考，更不同于在校读书时的考试。它不仅要考查参赛者的基本知识与基本技能，而且还应有一些难度较大、具有竞赛性的题目。因此，数学竞赛试题有其难度大、题型新、知识面广，解法巧妙等特点。对此，我们必须从培养发现思维的能力着手，努力探索解题规律，为参加各级数学竞赛作好充分准备。

一、抓基础，练好基本功

俗话说："万丈高楼从地起"，讲的是建房造楼要打好地基，从地而起，绝不能修建空中楼阁。同理，要参加中学生数学竞赛，也必须打好基础，练好基本功。所谓基础，应当包括几个密切相关的主要方面。

1. 数学的基础知识与基本技能；
2. 相应的数学思想和数学方法；
3. 相应的数学能力；
4. 运用数学知识于分析解决问题。

所谓练好基本功，就是不但要牢固掌握常用解题方法，而且还应努力作到"三化"、"四想"，有效地解答各种层次的试题。

这里所说的"三化"，意指简化、转化、分化．所谓"简化"，就是把题目具体化、特殊化、简单化，以便探索到一般规律，然后回到原题．

例1 （IMO试题　苏丹提供）

34个国家参加IMO的审议会，每个代表团由组长和组员各一人组成．开会前与会者互相握手，但属于同一国的两人就不握手了．会后I国组长问其他与会者，问他们与多少人握手，他得到的答案都不相同，问I国的组员与多少人握手？

思考　把34个国家简化为两个国家，以研究握手的规律．属于I国的二人称甲、乙；属于A国的二人称丙、丁．甲问乙、丙、丁三人，得知他们的握手数应为0，1，2中的一个，这样的分配情况只能是乙为1次，丙和丁为0、2次或2、0次，从而得出规律：握手次数最多的2次与最少的0次必须属于同一个国家，而握手次数都等于0的两人只能属于I国，于是可回到原题．

解：34个国家的67人中，握手次数最多的66与最少的0，应属于同一个国家；握手j次和66－j次也属于同一个国家；而I国两人的握手次数应相等，都应等于$(0+66)\div 2=33$．

所谓"转化"，就是通过类比，把过去学过的基础知识与现在的问题比较，以发现其相似点和不同点，然后对问题进行转化，把生疏问题转化为熟悉的问题；把未知问题转化为已知问题．

例2 （IMO试题　新加坡提供）

是否存在整数m和n使得

$$5m^2-6mn+7n^2=1985.$$

思考　若以m、n的允许值代入方程是无法发现规律的，

因而考虑"转化"这个问题，把原方程变成一个简单的不定方程，再讨论它是否有解。

解 把原方程变形为

$$(5m-3n)^2=13(763-2n^2)+6.$$

设 $x=5m-3n$，$y=763-2n^2$。

则有 $x^2=13y+6$。

若能找到满足方程中 x、y 的解，则原题得到满足，否则就不存在这样的 m、n。

现在，对方程的解进行验证，探索。当 x 的值取0,1,2,…，13时，它们相应的余数 r 分别是0，1，4，…,0。即

x:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
r:	0	1	4	9	3	12	10	10	12	3	9	4	1.

由于 $(13+a)^2=13(13+2a)+a^2$，

所以 x 取13－25，26－38，…的值，它们的余数是周期地重复出现，而这些余数中没有一个是6，于是，无论 m、n 取什么整数都无法使原等式成立。

所谓"分化"，就是先把问题分割为若干小问题，然后着手解决这些小问题，最后大问题也就随之而解。

例3 （IMO试题 冰岛提供）

数 x_1，$x_2,\cdots,x_n$ 等于1或－1，且 $x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4+x_2\cdot x_3\cdot x_4\cdot x_5+\cdots+x_{n-3}\cdot x_{n-2}\cdot x_{n-1}\cdot x_n+x_{n-2}\cdot x_{n-1}\cdot x_n\cdot x_1+x_{n-1}\cdot x_n\cdot x_1\cdot x_2+x_n\cdot x_1\cdot x_2\cdot x_3=0$。证明 n 能被4整除。

思考 分两步证，每次都证明 n 及 $m(n=2m)$ 能被2整除，问题就解决了。

证明 设 $y_k=x_k\cdot x_{k+1}\cdot x_{k+2}\cdot x_{k+3}$。若 $k+i$ 超过 n 时，

则$u+j=j$。

由已知$y_k=1$或-1且$y_1+y_2+\cdots+y_n=0$，可知式中1和-1各占其半，n为偶数，设$n=2m$。

于是$y_1\cdot y_2\cdot\cdots y_n=1^m(-1)^m=(-1)^m$。

又　$y_1\cdot y_2\cdot\cdots\cdot y_n=(x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n)^4=1$，

则　$(-1)^m=1$，$m=2p$，$n=4p$　$(p\in N)$

即n能被4整除。

这里所说的"四想"，意指联想、猜想、推想、异想。所谓"联想"，就是在以前所学的知识仓库里，找出与题目很接近的或很相似的原理、结论或命题来，变通使用这些知识，看看能否解决所论问题。

例4　(IMO试题　民主德国提供)

在平面内有100条不重合的直线，它们的交点恰好是1985个。这样的直线是否存在？如果有，请你找出来。

思考　考虑到平面上m条平行线组与n条平行线组的交点有mn个。这样，本题就类似于求满足$mn=1985$，$m+n=100$的m、n之值。于是联想韦达定理，造一个一元二次方程，求出它的近似根，再尝试探求解决问题的办法。

由于$x^2-100x+1985=0$，$x_1\approx73$，$x_2\approx27$，

$$73\times27=1971<1985,$$

故把x_2改为26，留出一条作为调整。因为最后留出的这一条直线与前面99条直线最多有99个交点，于是发现下面这个等式：

$$1985=73\times26+99-12。$$

从而得到解题办法。

解　作直线系$x=k(k=1,2,\cdots,73)$和$y=i(i=1,2,$

…，26），再作直线l：$y=x+14$。

因为直线l与上述二直线系有99个交点，但其中(1,15)，(2，16)，(3，17)，…，(12，26)这12个点是重复的，应于扣除，于是这100条直线就有1985个交点.

所谓“猜想”，就是当其对解决问题的途径、原则和方法不能马上找到，而要去选择一些虽然不能完全正确地解决问题，但却接近于解决问题的途径、原则和方法。当然，猜想不一定正确，为此还须证明其真实性。

例5 （IMO试题　匈牙利提供）

设　$S_n=\sum_{k=1}^{n}(k^5+k^7)$，求$S_n$和$S_{3n}$的最大公因数.

思考　通过观察来探索S_n的通项公式。

n以1，2，3，…代入得

$$S_1=2=\frac{1}{8}\cdot 1^4\cdot 2^4,$$

$$S_2=2\cdot 3^4=\frac{1}{8}2^4\cdot 3^4,$$

$$S_3=2^5\cdot 3^4=\frac{1}{8}3^4\cdot 4^4,$$

$$S_4=2^5\cdot 5^4=\frac{1}{8}4^4\cdot 5^4,$$

$$S_5=2\cdot 3^4\cdot 5^4=\frac{1}{8}5^4\cdot 6^4,$$

从而猜想

$$S_n=\frac{1}{8}n^4(n+1)^4. \qquad (*)$$

解：首先证明上述猜想。

当$n=1$时，（ * ）式显然成立。

假设$n=k$时（ * ）式成立，则当$m=k+1$时，

$$S_{k+1}=\frac{1}{8}k^4(k+1)^4+(k+1)^5+(k+1)^7$$

$$=\frac{1}{8}(k+1)^4(k^4+8k^3+24k^2+32k+16)$$

$$=\frac{1}{8}(k+1)^4(k+2)^4$$

可知（ * ）式亦成立。

则知猜想证实，有

$$S_n=\frac{1}{8}n^4(n+1)^4=2\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^4,$$

从而 $S_{3n}=2\left[\frac{3n(3n+1)}{2}\right]^4$.

(1) 当$n=2k$时，则S_n与S_{3n}的最大公因数$d=(S_n, S_{3n})$

$$=\left\{2\left[\frac{2k(2k+1)}{2}\right]^4, 2\left[\frac{6k(6k+1)}{2}\right]^4\right\}.$$

因为$2k+1$与$6k+1$互素，所以

$$d=2k^4[(2k+1)^4, 3^4]$$

若$k=3p+1$，$2k+1=6p+3=3(2p+1)$，

则 $d=\frac{81n^2}{8}$.

若 $k\neq 3p+1$，则$d=\frac{n^4}{8}$.

(2) 当$n=2k+1$时，

$$S_n=2[(2k+1)(k+1)]^4,$$

$$S_{3n}=2[3(2k+1)(3k+2)]^4.$$

因为$3k+2$与$2k+1$、$k+1$互素，所以

$$d=(S_n,\ S_{3n})=2(2k+1)^4[3,\ (k+1)^4].$$

当　$k=3p+2$，$k+1=3(p+1)$时，

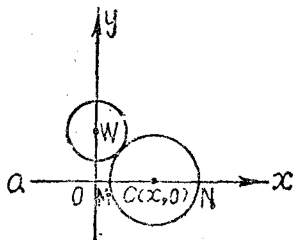
则　$d=2n\cdot 3^4=162n^4$；

当　$k\neq 3p+2$时，$d=2n^4$.

所谓"推想"，就是充分应用已知条件，跟盯着求证的目标，逐步探索，采取"摸着石头过河"的办法，看一步走一步.

例6　(IMO试题　越南提供)

在平面内，$\odot w$的圆心和半径R，以及直线a都是已知的，w到a的距离是d，且$d>R$，在a上选取M、N两点，使得MN为直径的圆与$\odot w$相切，求证，在平面上存在一个点A，使A对MN的视角为定值.



(图11-1)

思考　充分应用已知条件，初步探索A的位置. 首先建立直角坐标系，如图11-1.

考虑到对于任意的MN都存在定点A，这样A必定在y轴上，因而设A的坐标为$(0,\ h)$，以MN为直径的圆心C的坐标为$(x,\ 0)$，则知$M(x-r,\ 0)$，$N(x+r,\ 0)$，它们与A的联线的斜率分别是

$$k_1=-\frac{h}{x-r},$$

$$k_2 = -\frac{h}{x+r}$$

解 A对MN的视角θ，可由下式求得：

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{2rh}{x^2 - r^2 + h^2} \tag{1}$$

因 $x^2 + d^2 = R^2 + 2Rr + r^2$，

则 $x^2 - r^2 = R^2 + 2Rr - d^2$

代入(1) 得 $$\operatorname{tg}\theta = \frac{2rh}{R^2 + 2Rr - d^2 + h^2} \tag{2}$$

对(2) 进行分析，显然当且仅当

$k^2 = d^2 - R^2$时，$\operatorname{tg}\theta = \frac{2rh}{2Rr} = \frac{h}{R}$为定值。

这就说明，平面上存在一点$A(0, \sqrt{d^2 - R^2})$和它关于x轴的对称点$A'(0, -\sqrt{d^2 - R^2})$，对MN的视角是定值$\operatorname{arctg}\frac{h}{R}$。

所谓"异想"，就是努力发挥"求异思维"的能动作用，寻找异于常规的巧妙解法。

例7 (IMO试题 新加坡提供)

a、b、c是实数且满足

$$\frac{1}{bc - a^2} + \frac{1}{ca - b^2} + \frac{1}{ab - c^2} = 0$$

求证 $$\frac{a}{(bc - a^2)^2} + \frac{b}{(ca - b^2)^2} + \frac{c}{(ab - c^2)^2} = 0.$$

思考 从形式上看，已知和求证的两个式子都是轮换式，

这样容易暗示我们用“轮换式分解因式”的方法以求a，b或c的值，再把它代入求证的左边，使其值为零。但是，这种方法难以进行，因此，必须改变策略，探索异于寻常的解法。

若把等式左边的分母视为x，y，z，观察它们之间的联系，作出下面的乘积：

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)=\frac{a}{x^2}+\frac{b}{y^2}+\frac{c}{z^2}+\left[\frac{a}{x}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+\frac{b}{y}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)+\frac{c}{z}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)\right].$$

我们发现，从已知的条件和求证结论中给予了提示：右边中括号内的值应该为0。事实上，$a(y+z)+b(x+z)+c(x+y)=a(ca-b^2+ab-c^2)+b(bc-a^2+ab-a^2)+c(bc-a^2+ca-b^2)=0$。 这样，问题就解决了。

解：$\left(\frac{1}{bc-a^2}+\frac{1}{ca-b^2}+\frac{1}{ab-c^2}\right)\left(\frac{a}{bc-a^2}+\frac{b}{ac-b^2}+\frac{c}{ab-c^2}\right)$

$$=\frac{a}{(bc-a^2)^2}+\frac{b}{(ca-b^2)^2}+\frac{c}{(ab-c^2)^2}+0.$$

因为$\frac{1}{bc-a^2}+\frac{1}{ca-b^2}+\frac{1}{ab-c^2}=0$，

所以 $\frac{a}{(bc-a^2)}+\frac{b}{(ca-b^2)^2}+\frac{c}{(ab-c^2)^2}=0$.

二、扩知识、促进正迁移

数学竞赛试题，涉及的知识面广，不仅有传统数学的内容(如初等数论、初等几何、代数与初等函数等)，而且近代数学和现代数学(如组合数学、图论、函数方程、概率论等)知识与日俱增；不仅要运用传统数学中的重要方法(如反证法、数学归纳法等)，而且也要运用中学教科书里一般未曾介绍的新的数学方法(如抽屉原则抽与包含排斥原理等)．因此，本书第一册(初中部分)和第二册(高中部分)的前面十讲的有关内容，都为扩大知识面而作了专题讲解，以期见多识广，创造条件，促进正迁移的产生．

例如，对于大家熟知的集合知识，首先是我们要能熟练地应用它来解决有关其概念、运算的一般问题；二是必须熟悉由它导出的十分有用的“抽屉原则”；三是牢固掌握“包含排斥原理”；四是应当注意平面点集问题．

对于集合概念与运算的应用，这里再举二例．

例1 (87年全国竞赛题)

已知集合 $M=\{x,\ xy,\ \lg(xy)\}$及$N=\{0,\ |x|,\ y\}$，并且$M=N$．那么$\left(x+\frac{1}{y}\right)+\left(x^2+\frac{1}{y^2}\right)+\left(x^3+\frac{1}{y^3}\right)+\cdots+\left(x^{2001}+\frac{1}{y^{2001}}\right)$的值等于________．

思考 因为$M=N$，所以$0\in M$，且x、y均不能为0，则$\lg(xy)=0$，$xy=1$．

从而，$1\in N$．若$y=1$，必有$x=1$，这与集合元素的互异性

矛盾．故只能$|x|=1$　且$x=-1$，得$y=-1$．因此，

$$x+\frac{1}{y}=-2,\ x^2+\frac{1}{y^2}=2, x^3+\frac{1}{y^3}=-2,\ \cdots\cdots,$$

$$x^{2000}+\frac{1}{y^{2000}}=2,\ x^{2001}+\frac{1}{y^{2001}}=-2.$$

所以，要求和的值等于-2．

例2　（86年全国竞赛题）

设实数a、b、c满足

$$\begin{cases}a^2-bc-8a+7=0\\ b^2+c^2+bc-6a+6=0,\end{cases}$$

那么a的取值范围是

(A) $(-\infty, +\infty)$，　　(B) $(-\infty, 1]\cup[9, +\infty)$，

(C) $(0, 7)$，　　(D) $[1, 9]$．

思考　因为$(-\infty, +\infty)\cap((-\infty, 1]\cup[9,+\infty))\cap(0, 7)=(0, 1]$，所以，取$a=\frac{1}{2}\in(0,1]$并代入题设第二式时，，得　$b^2+c^2+bc+3=0$．由此有

$$0\leqslant\left(b+\frac{c}{2}\right)^2+\frac{3}{4}c^2=b^2+c^2+bc=-3.$$

上述矛盾表明(A)、(B)、(C)均不真，因而应选取答案(D)．

对于"抽屉原则"，本书第一册（初中部分）已作详细讨论，不再赘述．

对于"包含排斥原理"，这里作一简要介绍．

假设A是一个有限集，它的元素个数用符号$n(A)$表示．例如，$A=\{x|x是10以内的奇自然数\}$，则$n(A)=5$．

我们若能将集A分成满足下述性质的n个子集：

(1) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n = A$；

(2) $A_i \cap A_j = \varnothing (i, j = 1, 2, \cdots, n, i \neq j)$

则A_1，A_2，A_3，…，A_n称为A的一个完全分划。

显然，如果A_1，A_2，…，A_n是A的一个完全分划，则$n(A) = n(A_1) + n(A_2) + \cdots + n(An)$。

但是，在很多情况下，要找到A的一个完全分划并不容易，因而提出这样一个问题：若A_1，A_2，…，A_n是A的子集，$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = A$，我们如何计算$n(A)$？下列基本原理作了回答

命题1. $n(A_1 \cup A_2) = n(A_1) + (A_2) - n(A_1 \cap A_2)$。

命题2. $n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) - n(A_1 \cap A_2) - n(A_1 \cap A_3) - n(A_2 \cap A_3) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$。

证明 $n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = n[(A_1 \cup A_2) \cup A_3]$

$= n(A_1 \cup A_2) + n(A_3) - n[(A_1 \cup A_2) \cap A_3]$

$= n(A_1 + n(A_2) - n(A_1 \cap A_2) + n(A_3) - n[(A_1 \cup A_2) \cap A_3]$

$= n(A_1) + n(A_2) - n(A_1 \cap A_2) + n(A_3) - n[(A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)]$

$= n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) - n(A_1 \cap A_2) - n(A_1 \cap A_3) - n(A_2 \cap A_3) + n[(A_1 \cap A_3) \cap (A_2 \cap A_3)]$

$= n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) - n(A_1 \cap A_2) - n(A_1 \cap A_3) - n(A_2 \cap A_3) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$。

一般地，有

定理1. 设A_1，A_2，…，A_n为有限集合，其元素个数分别为$n(A_1)$，$n(A_2)$，…，$n(A_n)$。则

$$n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}n(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j<n}n(A_i\cap A_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}n(A_i\cap A_j\cap A_k).+\cdots+(-1)^n n(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n)。$$

这个定理，不难用数学归纳法证明.（从略）

利用这个定理计算集合元素的个数，首先计算包容了的元素的个数，但包容多了时，又排除掉某些重复计算的元素的个数；当排除多了时，又要包容进来，如此继续下去，就得到所求元素的个数，这是计数方法中的一条重要原理，被称为包含排斥原理，是由西尔维斯特(J. J.Sylvester 1814—1847)创立的，其后被庞加莱(H. J.poincare 1854—1912)把这一原理推广到概率论中加以应用.

例3 （79年福建省竞赛题）

某校先后举行数理化三种竞赛，学生中至少参加一科的：数学807人，物理739人，化学437人；至少参加两科的：数学、物理593人，数学、化学371，物理、化学267人；三科都参加的213人. 试计算参加竞赛的学生总数.

思考 设M＝{参加数学竞赛的学生}，

P＝{参加物理竞赛的学生}，

Q＝{参加化学竞赛的学生}.

由题设有 $n(M)=807, n(P)=739, n(Q)=437, n(M\cap P)=593$，$n(M\cap Q)=371$，$n(P\cap Q)=267$，$n(M\cap P\cap Q)=213$.

所以，$n(M\cup P\cup Q)=807+739+437-593-371-267+213=965$。

注：本例应用图解法是很直观和简便的，请读者自行完成。

如果用$\overline{A_i}$表示A_i的补集，S表示全集。则由De。Morgan定律易得

定理2。设A_i是全集S的子集($i=1, 2, \cdots, n$)，$\overline{A_i}$是A_i的补集，即$\overline{A_i}=S-A_i$，则

$$n(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_n})=n(S)-\sum n(A_i)+\sum n(A_i\cap A_j)-\sum n(A_i\cap A_j\cap A_k)+\cdots+(-1)^n n(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n).$$

证明　因为$S=(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)\cup(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_n})$

且　$(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)\cap(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_n})=\varnothing$，

所所$n(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_n})=n(\overline{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n})$

$=n[S-(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)]$

$=n(S)-n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)$

根据定理1，则得

$$n(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_n})=n(S)-\sum n(A_i)+\sum n(A_i\cap A_j)-\sum n(A_i\cap A_j\cap A_k)+\cdots\cdots+(-1)^n n(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n).$$

定理2有时也称为逐步淘汰原理。

例4　试求从1到500的自然数中，那些不能被3或5任何一个整除的数的个数。

思考　设$S=\{1, 2, 3, 4, \cdots, 500\}$，

$A_1=\{x|\ x\in S,\ x能被3整除\}$，

$A_2=\{x|\ x\in s,\ x能被5整除\}$。

显然，$\overline{A}_1=\{x|x\in s, x\text{不能被3整除}\}$，

$\overline{A}_2=\{x|x\in s, x\text{不能被 5 整除}\}$，

$\overline{A}_1\cap\overline{A}_2=\{x|x\in s, x\text{不能被 3 或 5 整除}\}$.

由题意，$n(A_1)=\left[\frac{500}{3}\right]=166$，

$$n(A_2)=\left[\frac{500}{5}\right]=100,$$

$$n(A_1\cap A_2)=\left[\frac{500}{3\times5}\right]=33,$$

所以 $n(A_1\cup A_2)=n(A_1)+n(A_2)-n(A_1\cap A_2)$

$=166+100-33=233$。

又因 $\overline{A}_1\cap\overline{A}_2=\overline{A_1\cup A_2}=S-(A_1\cup A_2)$，

所以$n(\overline{A}_1\cap\overline{A}_2)=n(s)-n(A_1\cup A_2)=500-233=267$。

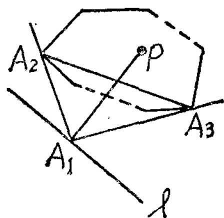
即是从 1 到500的自然数中不能被 3 或 5 任何一个整除的数的个数是267．

这样，利用逐步淘汰原理，可从问题的反面迂回地计算来解答问题。

在数学竞赛中，有不少关于平面点集的试题，其中一类就是以平面有限点集中的点为顶点，构成各种不同形状的多边形问题。解决这类问题一般有两件基本工具：一件是周界多边形存在定理，另一件是以五个点的情形作为基本依据。由五个点构成的点集是平面有限点集中简单而又具有代表性的情形，其中浓缩着许多重要信息，因而往往成为解决复杂点集问题的基础和钥匙。

设有一个由平面上有限个点组成的集合G，如果存在一个以G中的点作为顶点的凸多边形，使得G中其余的点都在它的内部，则将这个凸多边形叫做G的凸包，又叫周界多边形。

定理3 任何含有有限个点的平面点集G，只要其中任意3点都不共线，就都有一个周界多边形。



（图11-2）

记点集G中的点的数目为n，我们来对n作归纳证明。

若$n=3$，则结论显然成立。

假设$n=k$时结论成立，我们来考察$n=k+1$的情形。

任取平面上一点P。设A_1是G中距P最远的点。连PA_1，并过A_1作直线$l \perp PA_1$。则知G中其余点与P均位于l的同一侧。于是可找出G中两点A_2和A_3，使得G中的所有点均在$\angle A_2A_1A_3$内部及其两边上。不妨设A_2和A_3分别是射线A_1A_2和A_1A_3上距A_1最近的G中的非A_1的点。连A_2A_3，如果G中其余点均在$\triangle A_1A_2A_3$内部，则$\triangle A_1A_2A_3$就是G的周界多边形。否则，必有一部分G中点位于该三角形外。我们来对G中除A_1之外的k个点使用归纳假设，知它们存在周界多边形。而由A_2、A_3的性质知道，这两个点一定是该周界多边形的顶点。于是连线A_2A_3或为该周界多边形的一条边，或为它的一条对角线。不论哪种情形，我们都保留上述周界多边形位于$\triangle A_1A_2A_3$以外的部分，而接上A_2A_1和A_1A_3两条边，使其成为一个新的凸多边形。不难想见，该凸多边形就是点集

G的周界多边形. 于是由归纳法原理知命题获证.

上述有关周界多边形存在性的定理，是平面有限点集的一个重要的基本性质，许多与平面点集有关的问题，就是以它作为依据来解决的.

例5 （85年全国竞赛题）

在平面上任意给出5个点，以λ表示这些点间最大距离与最小距离之比. 证明$\lambda \geqslant 2\sin 54°$，并讨论等号成立的充分必要条件.

我们来分情形讨论：

（1）5个点中至少有3个点A_1，A_2，A_3共线，这是最简单的情形.

不妨设A_2在A_1和A_3之间，而且$A_1A_2 \leqslant A_2A_3$，于是就有

$$\lambda \geqslant \frac{A_1A_3}{A_1A_2} \geqslant \frac{A_1A_2 + A_2A_3}{A_1A_2} \geqslant 2 > 2\sin 54°.$$

在其余的情形中，5个点中的任意3点都不共线，也就是说其中任意3点都可构成三角形. 这些情形的解答都与下述引理有关.

引理　若$\triangle ABC$中最大角不小于$108°$，则它的最长边与最短边之比不小于$2\sin 54°$. 等号当且仅当最大角为$108°$，且其余两角相等时成立.

设$\angle A$为最大角，$\angle C = x$为最小角，则有$x \leqslant \dfrac{180° - \angle A}{2}$

$\leqslant 36°$. 等号当且仅当$\angle A = 108°$且$\angle B = \angle C$时成立. 另由正弦函数性质知

$$\sin A = \sin(B + C) \geqslant \sin 2x = 2\sin x\cos x.$$

于是，只要对$\triangle ABC$运用正弦定理，并根据余弦函数性质即知

$$\frac{a}{c}=\frac{\sin A}{\sin C}\geqslant\frac{2\sin x\cos x}{\sin x}=2\cos x\geqslant 2\cos 36^\circ=2\sin 54^\circ$$

由证明过程可知，等号当且仅当$\angle A=108^\circ$且$\angle B=\angle C$时成立。

有了这个引理，我们只要再对5个点的位置区分各种情形，分别讨论从它们作为顶点的三角形中，是否存在如引理所述的三角形就可以了。情形的区分则基本依据定理3进行。

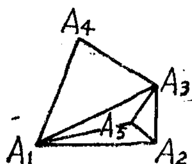
(2) 5个点恰好形成正五边形$A_1A_2A_3A_4A_5$。这时，五边形的五个内角皆为108°，而5条边和5条对角线也都分别相等。所以，5个点之间的距离只有两种情况：或等于边长，或等于对角线长。鉴于这种情况，由引理即知$\lambda=2\sin 54^\circ$。

(3) 5个点形成凸五边形，但不是正五边形。我们再来分两种情形考虑：如果5个内角都相等(即都等于108°)，那么由于$A_1A_2A_3A_4A_5$不是正五边形，所以必有两条邻边不相等，不妨设$A_1A_2<A_2A_3$，于是由引理即知$\lambda\geqslant\frac{A_1A_3}{A_1A_2}>2\sin 54^\circ$。如果5个内角不都相等，则必有一个内角大于$\frac{540^\circ}{5}=108^\circ$，不妨设$\angle A_2>108^\circ$，于是由引理仍知

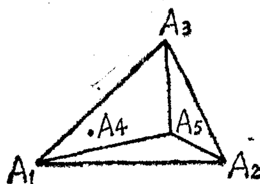
$$\lambda\geqslant max\left\{\frac{A_1A_3}{A_1A_2},\ \frac{A_1A_3}{A_2A_3}\right\}>2\sin 54^\circ.$$

(4) 5个点的周界多边形为凸四边形$A_1A_2A_3A_4$，而A_5在其内部。我们任意作出周界四边形的一条对角线，将其

分为两个三角形．由于5个点中的任意3点都不共线，则知A_5必落在上述两个三角形之一的内部．不妨设A_5在$\triangle A_1A_2A_3$内部．再连A_1A_5、A_2A_5和A_3A_5，将$\triangle A_1A_2A_3$分成3个三角形(图11-3)．由于这3个三角形的以A_5为顶点的3个内角之和为360°，因而必有其一不小于$\frac{360°}{3}=120°$，所以由引理便知$\lambda>2\sin54°$．



(图11-3)



(图11-4)

(5) 5个点的周界多边形为$\triangle A_1A_2A_3$，而A_4和A_5在其内部(图11-4)。于是只要对$\triangle A_1A_2A_3$和A_5作与情形(4)相应的讨论，即知仍有$\lambda>2\sin54°$．

上述五种情形概括了平面5点的一切可能的位置情况，故知所证不等式恒成立．又由于等号在情形(2)中一定成立，所以又可得出结论：等号成立的充分必要条件是5个点构成正五边形．

注：上述问题是5点问题中的一个普通的例子，采用了划分情形讨论问题的方法作出解答．这种讨论问题的方法，对于处理一些与平面有限点集有关的问题，常常是有效的．

例6 (第11届国际竞赛题)

在平面上给出了n个点($n>4$)，现知其中任意3点不共

线．证明：至少存在C_{n-3}^{2}个以上述点为顶点的凸四边形。

众所周知，关于 5 个点的情形有如下命题："在平面上给出 5 个点。如果其中任意 3 点不共线，则至少存在一个以上述点为顶点的凸四边形"。现在，我们就以这个命题作为解答本例的基础，然后再给出这个 5 点问题自身的证明。

如果$n=5$，则由上述命题知本例结论成立，因$C_{5-3}^{2}=C_{2}^{2}=1$。

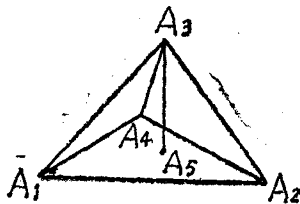
如果$n>5$，则自n个点中任意取出 5 个点来，其中都有某 4 个点构成凸四边形。所以，连同重复计算在内，至少有C_{n}^{5}个凸四边形。但因每个这样的凸四边形的 4 个顶点，都可归属于C_{n-4}^{1}个不同的 5 点组，所以每个凸四边形，最多可能被重复计算了$C_{n-4}^{1}=n-4$次，故知不同的凸四边形的数目不会少于$\frac{C_{n}^{5}}{n-4}>C_{n-3}^{2}$个。

注 1 通过上述例题6，我们看到了 5 点组对解题所起的基础作用，从中学到了解决平面点集问题的一个重要方法。

注 2 上面关于 5 个点的问题，也可以通过考虑周界多边形的形状而划分情形讨论。

(1) 如果 5 个点的周界多边形为凸五边形或凸四边形，则结论显然成立。

(2) 如果 5 个点的周界多边形为$\triangle A_1A_2A_3$，而A_4和A_5在其内部，如图11-5所示，可连接A_1A_4，A_2A_4和A_3A_4，而将$\triangle A_1A_2A_3$分为 3 个三角形。由于 5 个点中无3点共线，



(图11-5)

则知A_5必落在上述三个三角形之一的内部．不妨设在$\triangle A_1A_2A_4$内部．连A_3A_5，则线段A_3A_5必与线段A_1A_4或A_2A_4相交，且交点不在这些线段的端点处．不妨设A_3A_5与A_2A_4相交，于是$A_2A_3A_4A_5$就是一个凸四边形（图11-5），因而结论证实．

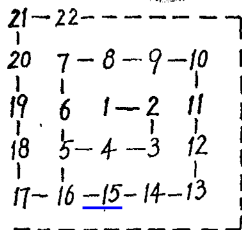
三、勤练习，培养诸能力

通过练习，努力探索解题规律，认真总结解题方法，不断提高解题能力．

在解答数学问题中，也有不少规律性的东西，如果我们认真探讨并加以掌握，就可加深对问题的认识，有些问题便可迎刃而解，进而给以推广．

例1 （第一届《华罗庚金杯赛》试题）

将自然数1，2，3，…，按右图排列：



从1开始，右边写2，然后向下转弯写3，再向左转弯写4，5，再向上转弯写6，7，…．这样，第一次转弯的是第2，第二次转弯的是3，第三次转弯的是5，第四次转弯的是7，问第二十次转弯的是几？

思考 把转角上的数写出来就是2，3，5，7，10，13，17，……．

我们先看每相邻两数的关系，作出它们的差，得1，2，2，3，3，……．

由此可见，第一个数是1，第二、第三个数是2，2，第

四、第五个数是3，3．……。所以转角上的数有这样的规律：

第一个转角上的数是2，

第二个转角上的数是$3=\underbrace{2+1}_{2个数}$

第三个转角上的数是$5=2+\underbrace{1+2}_{3个数}$

第四个转角上的数是$7=\underbrace{2+1+2+2}_{4个数}$

第五个转角上的数是$10=2+\underbrace{1+2+2+3}_{5个数}$

依次类推，

第二十个转角上的数是

$$\underbrace{2+1+2+2+3+3+\cdots+9+9+10+10}_{20个数}$$

$$=1+2(1+2+3+\cdots+9+10)$$

$$=1+2\times55=111.$$

注：若将上述问题推广到一般情况，即求第n个转角上的数是几？也不难得出答案。

事实上，设第n个转角上的数是a_n，根据题意，有下列规律。

当n是偶数时，$a_n=a_{n-1}+\dfrac{n}{2}$；

当n是奇数时，$\begin{cases}a_1=2\\ a_n=a_{n-1}+\dfrac{n+1}{2}(n>1).\end{cases}$

将以上两种情况写成统一的表达式，就是

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = a_{n-1} + \frac{n}{2} + \frac{1-(-1)^n}{4} (n \geqslant 2) \end{cases}$$

下面，我们来求a_n的用n表示的式子。

$$a_n = a_{n-1} + \frac{1}{4}\left[2n+1-(-1)^n\right],$$

$$a_{n-1} = a_{n-2} + \frac{1}{4}\left[2n-1-(-1)^{n-1}\right],$$

……………………………………

$$a_2 = a_1 + \frac{1}{4}(5-1)$$

将这$n-1$个式子相加，得

$$a_n = 2 + \frac{1}{4}\{[5+7+\cdots+(2n-1)]$$

$$+[-1+1-1+\cdots-(-1)^n]\}$$

$$= 2 + \frac{1}{4}\left[\frac{(2n+6)(n-1)}{2} - \frac{1-(-1)^n}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[2n^2+4n+9+(-1)^n\right].$$

同一个题目，从不同的角度和不同的途径去寻找不同的解法，既可以增加知识的纵横面和深广度；又可以发掘知识的内在联系，达到扩大视野和锻炼思维的作用；还可以总结各种解题方法，从中比较，巧解竞赛题。

在解题方法中，"构思模型"法，不仅具有独特、巧妙的

“独到之处”，而且还可借助构思的图形得到所论问题的更强的结果。

例 2 （57年北京市竞赛题）

方程 $\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=1$ 中设A、B、C都是锐角，求证：$\frac{\pi}{2}\leqslant A+B+C\leqslant\pi$。

思考一 由题设有

$$
\begin{aligned}
\sin^2A&=1-\sin^2B-\sin^2C=\cos^2B-\sin^2C\\
&=\cos^2B-\sin^2C\cos^2B+\sin^2C\cos^2B-\sin^2C\\
&=\cos^2B\cos^2C-\sin^2B\sin^2C\\
&=(\cos B\cos C-\sin B\sin C)(\cos B\cos C+\sin B\sin C)\\
&=\cos(B+C)\cos(B-C).
\end{aligned}
$$

今B和C都是锐角，故$\cos(B-C)>0$，从而$\cos(B+C)\geqslant0$，即$B+C$也是锐角，因此$A+B+C\leqslant\pi$。

又因B、C是锐角，当有$\cos(B-C)\geqslant\cos(B+C)$，即

$$
\begin{aligned}
\sin^2A&=\cos(B-C)\cos(B+C)\geqslant\cos^2(B+C)\\
&=\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-B-C\right).
\end{aligned}
$$

但A与$B+C$是锐角，即有

$$\sin A\geqslant\sin\left(\frac{\pi}{2}-B-C\right),$$

从而 $A\geqslant\frac{\pi}{2}-B-C$，即$A+B+C\geqslant\frac{\pi}{2}$

思考二 （构思模型法）

如图11-6所示，作一个长方体$KLMN-K_1L_1M_1N_1$，使其长、宽、高分别为

$$KL=\sin A,\ LM=\sin B,\ MM_1=\sin C,$$

则由题设得此长方体的对角线长为

$$LN_1=KM_1=\sqrt{\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C}=1,$$

因此，$\angle KN_1L=A$，$\angle MN_1L=B$，$\angle MKM_1=C$。

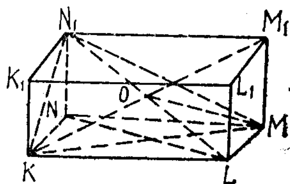
因$N_1L>NL$，所以

$$\sin A=\sin\angle KN_1L$$

$$=\frac{KL}{N_1L}<\frac{KL}{NL}=\sin\angle KNL,$$

$$\sin B=\sin\angle MN_1L$$

$$=\frac{ML}{N_1L}<\frac{ML}{NL}=\sin\angle MNL,$$



（图11-6）

故 $A<\angle KNL$，$B<\angle MNL$，

$$A+B<\angle KNL+\angle MNL=\frac{\pi}{2}.$$

同理可证 $B+C<\frac{\pi}{2}$，$C+A<\frac{\pi}{2}$，从而

$$2(A+B+C)<\frac{3}{2}\pi,\ \therefore A+B+C<\frac{3}{4}\pi.$$

记 LN_1与KM_1的交点为O，则

$$\angle KOL=2A,\ \angle LOM=2B,\ \angle MOM_1=2C.$$

因为三面角的任何一个面角小于其他两个面角的和，所以 $2A+2B=\angle KOL+\angle LOM>\angle KOM$.

于是，$$2A+2B+2C>\angle KOM+\angle MOM_1=\pi.$$

从而 $$A+B+C>\frac{\pi}{2}.$$

注：上面，我们不仅证明了例 2，而且应用构思模型法

还得到了更强的结果：

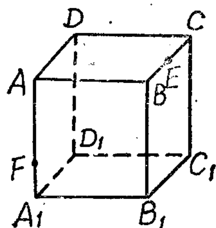
$$\frac{\pi}{2}<A+B+C<\frac{3}{4}\pi.$$

立体几何的解题技巧，从根本上说，就是实现空间问题向平面转化的技巧，其主要表现在于跨越具体的转化过程，直接利用已有的转化结论（定理、公式等），寻求简捷的解题手段。对此，我们应当努力培养空间想象能力。

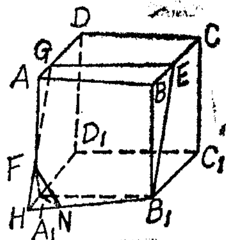
例 3 （85年全国竞赛题）

如图11-7，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E是BC的中点，F在AA_1上，且$A_1F:FA=1:2$，求平面B_1EF与底面$A_1B_1C_1D_1$所成的二面角。

思考一 显然，本题主要考察参赛者的空间想象能力。



（图11-7）



（图11-8）

求二面角要先作出它的棱，这就是截面和底面的交线。为此，可先求截面和D_1A_1延长线的交点H。由于平面$ADD_1A_1 \parallel$平面BCC_1B_1，所以它们与截面的交线平行。于是可连B_1E，过F作直线平行于B_1E，交AD于G，交D_1A_1于H，则B_1H为所求二面角的棱（图11-8）。

求二面角还得归结为求它的平面角。平面角的位置可以选择，最好要和已知元素有直接联系。这样可作$A_1N\perp B_1H$于N。由三垂线定理知$FN\perp B_1H$，所以$\angle A_1NF$就是所求二面角的平面角。

我们要求出$\angle A_1NF$的数值，为此可求$\text{tg}\angle A_1NF=\frac{A_1F}{A_1N}$。由于$A_1F=\frac{1}{3}A_1A$，$BE=\frac{1}{2}BC$。为了避免分数，不妨设$A_1A=BC=6$，则$A_1F=2$，$BE=3$。还要求$A_1N$。由$\triangle A_1B_1H$面积2倍为$A_1N\cdot B_1H=A_1B_1\cdot A_1H$，其中$A_1B_1=6$。应先求$A_1H$和$B_1H$，而$A_1H$可利用相似三角形$A_1FH$、$AFG$、$BB_1E$的边长比例求得。事实上，

$$A_1H:A_1F=AG:AF=BE:BB_1,$$

即 $A_1H:2=3:6$，则$A_1H=1$。

于是，$B_1H=\sqrt{A_1B_1^2+A_1H^2}=\sqrt{6^2+1^2}=\sqrt{37}$，

$$A_1N=A_1B_1\cdot\frac{A_1H}{B_1H}=\frac{6}{\sqrt{37}},$$

$$\text{tg}\angle A_1NF=\frac{A_1F}{A_1N}=\frac{2}{\frac{6}{\sqrt{37}}}.$$

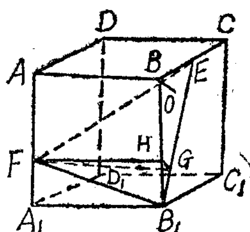
因而 $\angle A_1NF=arc\text{tg}\frac{\sqrt{37}}{3}$。

注：上面寻找二面角的平面角的方法是基本的，但是在平面角不很明显的情况下，添辅助线是困难的。

思考二 过B作平面B_1EF的垂线BO，O为垂足。

因BB_1是平面$A_1B_1C_1D_1$的垂线，由易证的命题：“两个

平面间的二面角的平面角与两平面的垂线所成的角相等或互补"，则知求平面B_1EF与平面$A_1B_1C_1D_1$的二面角，只需求出$\angle B_1BO$即可．而$\triangle B_1BO$是直角三角形，若令正方体边长为1，只需求出BO的长，问题就迎刃而解了．



（图11-9）

利用四面体体积$V_{B-B_1EF}=\frac{1}{3}S_{\triangle B1EF}\cdot BO$和$V_{F-B1EB}=\frac{1}{3}S_{\triangle B1EB}\cdot A_1B_1=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot 1=\frac{1}{12}$．由二者相等可得

$$BO=\frac{1}{4S_{\triangle B1EF}}.$$

现在，关键在于求$\triangle B_1EF$的面积．当然可用海伦公式求得，但此法计算太繁，所以迫使我们另想他法．

这里，介绍一种独特的添加辅助线的方法，可使面积计算大为简化．

图11-9所示．过F作$FG\perp B_1E$，交B_1E于G，即找出$\triangle FB_1E$的高FG，再过F作$FH\parallel A_1B_1$，交B_1B于H，连接HG．

因为 $FH\perp HG$，$B_1E\perp FG$，由三垂线定理之逆定理知 $B_1E\perp HG$．所以$\triangle B_1GH$是直角三角形．

利用$\triangle B_1GH\sim\triangle B_1BE$，有 $\frac{HG}{BE}=\frac{HB_1}{B_1E}$．由此可得

$HG=\frac{1}{3\sqrt{5}}$.

故 $FG^2=FH^2+HG^2=\frac{46}{45}$,

$B_1E=\sqrt{BB_1{}^2+BE^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$,

$S_{\triangle B_1EF}=\frac{1}{2}B_1E\cdot FG=\frac{\sqrt{46}}{12}$.

所以, $BO=\frac{12}{\sqrt{46}}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{\sqrt{46}}$.

设 $\angle B_1BO=\alpha(\alpha\leqslant 90°)$, 则$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{37}}{3}$,

$\alpha=\operatorname{tg}^{-1}\frac{\sqrt{37}}{3}$.

即平面 B_1EF与底面$A_1B_1C_1D_1$ 所成的二面角为

$\operatorname{tg}^{-1}\frac{\sqrt{37}}{3}$.

合理的思维是解题成功的前提，勤于练习，有利于学会应用正确的逻辑思维方法去寻找有效的解题途径；有利于我们根据思维的逻辑规律，有条不紊地对条件和结论进行分析、思考：题中条件和结论有何特征？题目要求解决哪些问题？解决这些问题必须具备什么条件？等等；不断克服思路茫然，不知所措的现象，在培养逻辑思维能力上多下功夫. 事实上，也只有从提高能力着手，才能适应各级各类竞赛的要求.

例 4 （17届全苏中学生数学奥林匹克试题）

一群幼儿园的孩子一对跟着一对地排队．我们发现每列中站着的男孩和女孩的数目一样多；一男一女组成的对数等于其余的对数．求证这群孩子的总数能被 8 整除．

思考 为了方便，用(男，女)表示第一列的男孩和第二列的女孩所成对的对数，其余类推；用a表示这些孩子的总对数，即总数的一半．由第一列男孩和女孩的数目一样多，得：

$$(男，女)+(男，男)=\frac{1}{2}a \tag{1}$$

$$(女，男)+(女，女)=\frac{1}{2}a \tag{2}$$

由第二列男孩和女孩数目一样多，得

$$(男，男)+(女，男)=\frac{1}{2}a \tag{3}$$

$$(男，女)+(女，女)=\frac{1}{2}a \tag{4}$$

由一男一女组成的对数等于其余的对数得

$$(男，女)+(女，男)=(男，男)+(女，女) \tag{5}$$

由(1)—(3)得 (男，女)=(女，男)

由(1)—(4)得 (男，男)=(女，女)

由(5)得 (男，女)=(男，男)

由(1)得 $(男，女)=\frac{1}{4}a$

则 $a=4(男，女)$，显然命题正确．

例 5 （86年全国竞赛题）

平面上有一个点集M和七个不同的圆C_1，C_2，C_3，…，

C_7，其中圆C_7恰好经过M中的七个点，圆C_6恰好经过M中的六个点，…，圆C_1恰好经过M中的一个点，那么M中的点数最少为：

(A)11，(B)12，(C)21，(D)28.

思考 假设各圆经过M中的点彼此不同，则知M中最少的点数是：$7+6+5+4+3+2+1=28$.但实际上每两圆都可以有公共点，所以答案不是(D)。要使M中的点最少，应使各圆上的点尽可能多地重合。

圆C_7上已有M中的七个点；圆C_6与C_7至多有两个交点，则C_6最少要经M中的四个点；圆C_5和C_4分别与C_7与C_6相交两个点，因而圆C_5最少还要经过M中的另一点；圆C_3、C_2、C_1显然都不需要经过M中的其它点。

综上可知，M中的点数最少是$7+4+1=12$个，故选答案(B)。

第 十 二 讲

沉着应战，力争优异成绩

纵观国内外数学竞赛试题，或取材于初等数学，而将近代、现代数学思想方法体现于解法中；或取材于近代数学的某些分支，取其特例等编成竞赛题。除此，还有一些试题并不需要高深的数学知识，却需要参赛者的机智和灵感、一定的思维技巧和应变能力。熟知竞赛试题的特点，参赛时才能保持清醒的头脑，旺盛的精力，临阵不乱，沉着应战，抓住思想中的一闪火花，寻求巧妙的解题思路和方法，力争优异成绩。在这里，仅就参赛时应注意的几个问题，作一些探讨。

一、细心审题，抓住基本。

细心审题是正确解题的前提，是提高解题能力的重要一环。审题时应做到“四要，四不要”。即：一要通读全题，理解题意，不要断章取义；二要对题目中关键的字和词仔细推敲，不要一掠而过；三要弄清已知条件中的含义及其与要求、结论之间的关系，不要草草下笔，随意推演；四要努力联系基础知识，全面辨析题意，把握解题关键，不要孤立地思考问题，犯“一孔之见”的错误。

这里所说的“基本”，除一般含义外，还包含基本题之意。

从整体上讲，一份竞赛题，多数题目在内容方面，没有超出中学数学教材规定的范围。因此，只要我们善于联系所学知识，应当说解答这类题目没有多大困难。一般地说，第一试中的多数题是基本题，就是第二试中也有基本题。对此，我们应当十分重视。

例1 （85年全国竞赛题）

假定有两个命题：

甲　a是大于0的实数，

乙　$a>b$且$a^{-1}>b^{-1}$。

那么(A)甲是乙的充分而不必要的条件；

(B)甲是乙的必要而不充分的条件；

(C)甲是乙的充分必要条件；

(D)甲既不是乙的充分条件，也不是乙的必要条件。

事实上，这个选择题只要我们掌握了充分条件、必要条件、充要条件的定义，再作适当的讨论，便不难作出正确的选择，得到答案(B)。

例2 （首届全国中学生数学冬令营竞赛题）

$\triangle ABC$中，BC边上的高$AD=12$，$\angle A$的平分线$AE=13$。设BC边上的中线$AF=m$。问m在什么范围内取值时，$\angle A$分别为锐角、直角、钝角。

解　为了方便起见，如图12—1所示。设$AB=c$，$AC=b$，$BC=a$，$AD=h$，$AE=t$。

由分角线定理知：$BE:EC=AB:AC=c:b$。

由此，$EC:BC=b:(b+c)$，即$EC=\dfrac{ab}{b+c}$。

从而，$BE=EC\cdot\dfrac{c}{b}=\dfrac{ac}{b+c}$。

假设　$\angle A=90°$，则由

$$t^2=bc-BE\cdot EC=bc-\frac{ac}{b+c}\cdot\frac{ab}{b+c}=bc-\frac{a^2bc}{(b+c)^2}$$

$$=bc\cdot\frac{(b+c)^2-a^2}{(b+c)^2}=\frac{2b^2c^2}{(b+c)^2},$$

可得　$13=\dfrac{\sqrt{2bc}}{b+c}$，即$b+c=\dfrac{\sqrt{2}}{13}bc$　　(1)

又由　$bc=ha$，有　$bc=12a$　　(2)

再有　$a^2=b^2+c^2=(b+c)^2-2bc$　　(3)

将(1)、(2)代入(3)得　$a=\dfrac{24\times169}{119}$。

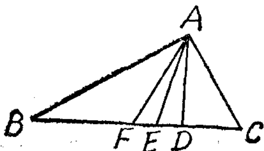
于是　$m=\dfrac{a}{2}=\dfrac{2028}{119}$。

由上易知，当m为$\dfrac{2028}{119}$时，$\angle A$为直角。

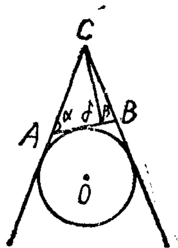
再作进一步分析，便知：

当$m>\dfrac{2028}{119}$时，$\angle A$为钝角；

当$13<m<\dfrac{2028}{119}$时，$\angle A$为锐角。



(图12—1)



(图12—2)

例 3 （第12届国际数学竞赛题）

设M是一个$\triangle ABC$的边AB上的任意一点，r_1，r_2，r分别是$\triangle AMC$、$\triangle BMC$、$\triangle ABC$的内切圆半径；p_1，p_2，p分别是这些三角形在$\angle ACB$内部旁切圆半径．求证：

$$\frac{r_1}{p_1}\cdot\frac{r_2}{p_2}=\frac{r}{p}.$$

证明 如图12—2．设$\angle BAC=\alpha$，$\angle ABC=\beta$，$\angle AMC=\delta$．

易知 $$AB=r\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right) \tag{1}$$

$$AB=p\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right) \tag{2}$$

从而 $$\frac{r}{p}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \tag{3}$$

同理 $$\frac{r_1}{p_1}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\delta}{2} \tag{4}$$

$$\frac{r_2}{p_2}=\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{180-\delta}{2}=\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2} \tag{5}$$

由(3)、(4)、(5)得

$$\frac{r_1}{p_1}\cdot\frac{r_2}{p_2}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{r}{p}.$$

即 $$\frac{r_1}{p_1}\cdot\frac{r_2}{p_2}=\frac{r}{p}.$$

例 4 （82年西德竞赛题）

用S表示数列1，2，3，…，2^n中各项的最大奇数因子之和．求证：$3S=4^n+2$．

注：这是一个与自然数有关的命题，容易联想到用数学归纳法．

证明　当$n=1$时，数列为1，2，则$S=1+1=2, 3\times2=6=4^1+2$，故命题为真．

假设$n=k-1$时，数列1，2，3，…，2^{k-1}中各项的最大奇数因子之和$S_{k-1}=\frac{1}{3}(4^{k-1}+2)$．

当$n=k$时，数列1，2，3，…，2^k中各项的最大奇数因子之和$S_k=[1+3+5+\cdots+(2^k-1)]+\{2, 4, 6, \cdots, 2^k\}$中各项的最大奇数因子之和．

因为$1+3+5+\cdots+(2^k-1)=\frac{[1+(2^k-1)]}{2}\cdot\frac{2^k}{2}=4^{k-1}$，

$\{2, 4, 6, \cdots, 2^k\}$中各项的最大奇数因子之和$=\{1, 2, 3, \cdots, 2^{k-1}\}$中各项的最大奇数因子之和$=S_{k-1}=\frac{1}{3}(4^{k-1}+2)$。

所以$S_k=4^{k-}+\frac{1}{3}(4^{k-1}+2)=\frac{1}{3}(4^k+2)$．

由上可知，命题成立．

解答前面四例，运用所学的知识并不多，可谓基本题。当然，要能得出正确结论，也必须深入地分析和仔细地计算。

二、仔细观察，全面分析

仔细观察试题的条件、结论、题型和根据题意作出的图

形，往往会帮助我们思考问题，寻求解法。

例1 （第27届国际数学竞赛题）

设正整数d不等于2，5，13．证明：在集合$\{2,5,13,d\}$中，可以找到两个不同元素a，b，使得$ab-1$不是完全平方数。

证明 观察所给集合中的元素，得知有下列关系：

$2\times5-1=3^2$，$2\times13-1=5^2$，$5\times13-1=8^2$。

于是，只需证$2d-1$，$5d-1$，$13d-1$不都是完全平方数。

证明这样的否定命题，可用反证法。

假设 $2d-1=x^2$ (1)

$5d-1=y^2$ $(x、y、z\in N)$ (2)

$13d-1=z^2$ (3)

由此导出矛盾即可。

通过仔细观察，可以猜测矛盾存在于三式共有的d的性质之中。

先观察(1)式，可知x是奇数．令$x=2n-1$，代入(1)式得 $2d-1=(2n-1)^2$。从而$d=2n^2-2n+1$，显然d是奇数．

若d是奇数，由(2)、(3)知，y和z都是偶数，可令$y=2p$，$z=2q$。

如果将$y=2p$，$z=2q$直接代入(2)、(3)得

$5d-1=4p^2$，$13d-1=4q^2$

不易导出矛盾。

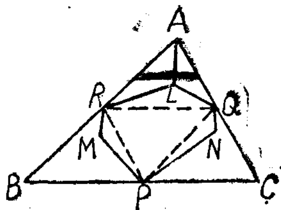
如果由 $\dfrac{(3)-(2)}{4}$：$2d=\dfrac{1}{4}(z^2-y^2)=q^2-p^2=(q-p)(q+p)$便知 q^2-p^2是偶数，从而p、q同是奇数或同是偶数，

于是$p+q$，$q-p$均是偶数。

则知 $2d$是4的倍数，显然，d是偶数。这与上面推得d是奇数相矛盾。命题得证。

例 2 （第19届全苏中学生数学奥林匹克试题）

在锐角三角形中，由每边的中点向其它两边引垂线。证明：这些垂线围成的六边形的面积等于三角形面积的一半。



（图12-3）

证明 先由题意作出图12-3。设P、Q、R为$\triangle ABC$三边的中点，并向其它两边引垂线，围成六边形$RMPNQL$。再设此六边形的面积为S。要证$S=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$。

通过观察图形，引出辅助线RP、PQ、QR。易得$\triangle AQR\cong\triangle BRP\cong\triangle CPQ\cong\triangle PQR$并且这些三角形都是锐角三角形，它们的垂心$L$、$M$、$N$都在$\triangle ABC$内。

再观察图形，易知

$S=S_{\triangle PQR}+S_{\triangle QLR}+S_{\triangle RMP}+S_{\triangle PNQ}$。

又由题设，不难得到

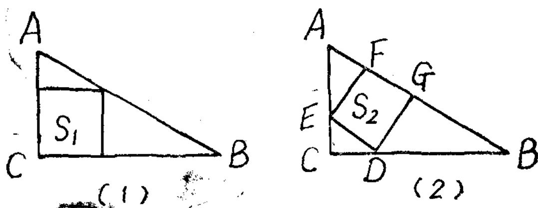
$$\triangle RMP\cong\triangle ALQ,\ \triangle PNQ\cong\triangle RLA.$$

于是，$S=S_{\triangle PQR}+S_{\triangle ARQ}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$。

例3 （第五届美国数学邀请赛试题）

正方形S_1和S_2内接于直角三角形ABC，如图12-4所示。若面积$(S_1)=441$，面积$(S_2)=440$，求$AC+CB$。

解 设$CB=x$，$CA=y$，要求$z=x+y$。



（图12-4）

先观察图12-4(1)，可知△ABC面积的2倍是

$$xy=21(x+y)=21z。$$

再观察图12-4(2)，易知

$$\triangle AEF\sim\triangle ABC\sim\triangle DBG。$$

$$AF=\frac{\sqrt{440}\ y}{x},\quad GB=\frac{\sqrt{440}\ x}{y}$$

$$AB=\sqrt{440}\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}+1\right)=\sqrt{x^2+y^2}。$$

由于$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=z^2-42z$，

$$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=\frac{1}{xy}(x^2+y^2)=\frac{1}{21z}(z^2-42z)。$$

所以 $AB^2=440\left(\frac{z}{21}-1\right)^2=z^2-42z$，

即 $440(z-21)^2=441(z^2-42z)$，

$$z^2-42z-440\times21^2=0,$$

其正根为 $z=21+\sqrt{21^2+440\times21^2}$

$$=21+441=462。$$

解法二 仔细观察图形，易知直角三角形ABC斜边的长是

$$21(\csc A+\sec A)=\sqrt{440}(\operatorname{ctg} A+1+\operatorname{tg} A).$$

两边乘以$\sin A\cos A$得

$$\begin{aligned}21(\cos A+\sin A)&=\sqrt{440}(\cos^2 A+\sin A\cos A+\sin^2 A)\\&=\sqrt{440}(1+\sin A\cos A)\end{aligned}$$

两边自乘得

$$441(1+2\sin A\cos A)=440(1+\sin A\cos A)^2$$

即 $440(\sin A\cos A)^2-2\sin A\cos A-1=0.$

解得正根 $\sin A\cos A=\dfrac{1}{20}.$

于是
$$\begin{aligned}AC+CB&=21(\operatorname{ctg} A+2+\operatorname{tg} A)\\&=21\left(\frac{1}{\sin A\cos A}+2\right)\\&=21(20+2)=462.\end{aligned}$$

为了完整地解答试题，必须进行全面分析，对各种可能的情况，都应加以讨论。

例4 （79年四川省竞赛题）

设函数$f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ $(x\neq0)$。求下式

$$1+2f(x)+3[f(x)]^2+\cdots+n[f(x)]^{n-1}$$

的和S。

解 由题设$x\neq0$知，本例应从两方面分析解答。

(1) 当$x>0$时，则$f(x)=\dfrac{|x|}{x}=1$。

故　$S=1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$。

（2）当$x<0$时，则$f(x)=\frac{|x|}{x}=-1$。

故　$S=1-2+3-4+\cdots+(-1)^{n-2}(n-1)+(-1)^{n-1}n$，

又　$S=1-2+3-4+\cdots+(-1)^{n-2}(n-1)+(-1)^{n-1}n$。

将上面两式相加，得

$$2S=1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n-1}+(-1)^{n-1}n$$

$$=\frac{1-(-1)^n}{1-(-1)}+(-1)^{n-1}n=\frac{1-(-1)^n}{2}+(-1)^{n-1}n$$

$$=\frac{1-(-1)^n+2n(-1)^{n-1}}{2}=\frac{1-(-1)^n(1+2n)}{2}$$

则　$S=\frac{1-(-1)^n(2n+1)}{4}$。

例5　（79年全国竞赛题）

在单位正方形的周界上任意两点之间连一条曲线．如果它把正方形分成面积相等的两部分．证明这条曲线的长度不小于1。

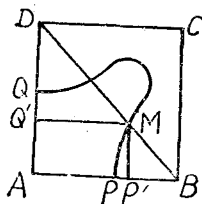
证明：设曲线PQ把正方形$ABCD$分成等积的两部分。

显然，我们必须就P、Q两点所处的不同位置，一一加以讨论。

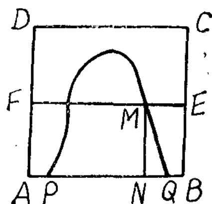
（1）如果P、Q两点分别在一对对边上，显然有曲线PQ的长$\geqslant|AB|=1$。

(2) 如果P、Q两点分别在相邻两边上，设P在AB上，Q在AD上。假设曲线PQ和对角线没有任何公共点，这时PQ和顶点A围成的部分的面积小于$\triangle ABD$的面积，即小于正方形面积的一半，与题设矛盾，因此曲线PQ和对角线BD必有公共点。设有一个公共点为M。作$MP' \perp AB$，$MQ' \perp AD$，则

$$
\begin{aligned}
\text{曲线}PQ\text{的长} &= \text{曲线}PM\text{的长} + \text{曲线}MQ\text{的长} \\
&\geqslant |P'M| + |MQ'| = |BP'| + |P'A| \\
&= |AB| = 1.
\end{aligned}
$$



(图12-5)



(图12-6)

(3) 如果P、Q两点在同一条边AB上，BC和AD的中点分别是E、F。(图12-6)

假设曲线PQ和EF没有任何公共点，则曲线PQ和线段PQ围成的面积显然小于正方形的一半，与题设矛盾。因此曲线PQ和线段EF必有公共点。设有一公共点为M，作$MN \perp AB$。则

$$
\begin{aligned}
\text{曲线}PQ\text{的长} &= \text{曲线}PM\text{的长} + \text{曲线}MQ\text{的长} \\
&\geqslant |MN| + |MN| = 1.
\end{aligned}
$$

综合上面三种情况的讨论，可知命题真。

例6 （86年全国竞赛题）

已知$f(x)=|1-2x|$，$x\in[0,1]$，那么方程

$$f(f(f(x)))=\frac{1}{2}x$$

的解的个数是____。

解 全面分析题设条件，不难知道函数的八段表达式：

$$f(f(f(x)))=\begin{cases}1-8x & 当0\leqslant x<\frac{1}{8}时，得x_1=\frac{2}{17}; \\ 8x-1 & 当\frac{1}{8}\leqslant x<\frac{1}{4}时，得x_2=\frac{2}{15}; \\ 3-8x & 当\frac{1}{4}\leqslant x<\frac{3}{8}时，得x_3=\frac{6}{17}; \\ 8x-3 & 当\frac{3}{8}\leqslant x<\frac{1}{2}时，得x_4=\frac{6}{15}; \\ 5-8x & 当\frac{1}{2}\leqslant x<\frac{5}{8}时，得x_5=\frac{10}{17}; \\ 8x-5 & 当\frac{5}{8}\leqslant x<\frac{3}{4}时，得x_6=\frac{3}{5}; \\ 7-8x & 当\frac{3}{4}\leqslant x<\frac{7}{8}时，得x_7=\frac{14}{17}; \\ 8x-7 & 当\frac{7}{8}\leqslant x\leqslant 1 \quad 得x_8=\frac{14}{15}.\end{cases}$$

综上可知，所求方程的解的个数是8。

三、抓住难点，反复思考

竞赛题难度大，是它的一个显著特点。竞赛题难在什么地方？这应具体问题具体分析。一般地讲，只要我们抓住试题的难点，经过反复思考，便可帮助我们寻求解题方法。在

这里，仅就四方面的难点举例说明：一是求值时难以直接计算而成为难点；二是新定义一个概念成了难点；三是新定义一种运算而成为难点；四是如何发现关系寻找规律这一大难点。

例1 （第一届美国数学邀请赛试题）

设$a_n=6^n+8^n$，求a_{83}被49除的余数。

解 本题的难点在于不便直接求出a_{83}的值．反复思考题意，由49与6、8的关系，易将a_n表达式变形为

$$a_n=(7-1)^n+(7+1)^n.$$

根据公式 $(a+b)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^ka^{n-k}b^k$，对于奇数$n$有

$$\begin{aligned}a_n&=[7^n-C_n^17^{n-1}+C_n^27^{n-2}-\cdots-C_n^{n-2}7^2+C_n^{n-1}7-1]\\&\quad+[7^n+C_n^17^{n-1}+C_n^27^{n-2}+\cdots+C_n^{n-2}7^2+C_n^{n-1}7+1]\\&=2[7^n+C_n^27^{n-2}+C_n^47^{n-4}+\cdots+C_n^{n-3}7^3+C_n^{n-1}7]\\&=2\times49[7^{n-2}+C_n^27^{n-4}+C_n^47^{n-6}+\cdots+C_n^{n-3}7]+14n.\end{aligned}$$

显然，$a_{83}=49k+14\times83=49k+1162\quad(k\in N)$。

于是，a_{83}被49除的余数$=1162$被49除的余数$=35$．

例2 （83年全国竞赛题）

已知a、b、c、d、m、n为正实数，$P=\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$，$Q=\sqrt{ma+nc}\sqrt{\frac{b}{m}+\frac{c}{n}}$，那么

(A) $P\geqslant Q$，　(B) $P\leqslant Q$，　(C) $P<Q$，

(D) P、Q大小关系不确定而与m、n大小有关．

解 本题的难点在于P、Q之值无法确定．抓住这一难点，采取投石问路的办法解之．

若各字母均取1，则有$P=2$，$Q=\sqrt{2}\sqrt{2}=2$，从而排除

答案C；

若$a=c=4$，$b=d=1$，$m=4$，$n=2$，则有$P=4$，$Q=\sqrt{18}$，于是$P<Q$，排除答案(A)。

在剩下两个答案中，显然应当考察(B)。由于直接比较P、Q难以进行，对此特作如下计算

$$Q^2-P^2=(ma+nc)\left(\frac{b}{m}+\frac{d}{n}\right)-(ab+cd+2\sqrt{abcd})$$

$$=\left(ab+cd+\frac{nbc}{m}+\frac{mad}{n}\right)-(ab+cd+2\sqrt{abcd})$$

$$=\frac{nbc}{m}+\frac{mad}{n}-2\sqrt{abcd}$$

$$\geqslant 2\sqrt{abcd}-2\sqrt{abcd}=0$$

则$Q^2\geqslant P^2$，从而$P\leqslant Q$，应选答案(B)。

例3 （第五届美国数学邀请赛试题）

一个非负数的有序对(m、n)称为“简单的”，如果在做$m+n$的加法时用不着进位，$m+n$称为有序对的和，求和为1942的“简单的”非负整数有序对的个数。

解 本题的难点在于新概念“简单的”非负数有序对(m、n)及其和的理解，抓住这一难点反复思考，易知$m+n=1942$，且有：

	个位	十位	百位	千位
m	0, 1, 2	0, 1, 2, 3, 4,	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,	0, 1
n	2, 1, 0	4, 3, 2, 1, 0,	9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0,	1, 0

于是，所求有序对的个数是

$c^1_3 \cdot c^1_5 \cdot c^1_{10} \cdot c^1_2 = 3\times5\times10\times2 = 300$。

例 4　（85年全国竞赛题）

对任意实数x，y，定义运算$x*y=ax+by+cxy$，其中a，b，c为常数．等式右端中的运算是通常的实数加法、乘法运算．现已知$1*2=3$，$2*3=4$，并且有一个非零实数d，使得对任意实数x都有$x*d=x$，则$d=$ ___．

解　本题的难点一是对新运算（$*$）的理解，二是就题设对任意实数x都有$x*d=x$的理解，只要抓住所述难点，便不难求出解答，

事实上，由题设有

$$a+2b+2c=3 \quad (1)$$

$$2a+3b+6c=4 \quad (3)$$

$$ax+bd+cdx=x \quad (3)$$

在（3）中因$d\neq0$，则取$x=0$，有$b=0$；再取$x=1$，有$a+cd=1$．又从（1）、（2）中解得$a=5$，$c=-1$，故$d=4$．

例 5　（第一届《华罗庚金杯赛》试题）

七十个数排成一行，除了两边的两个数以外，每个数的3倍都恰好等于它两边的两个数的和，这一行的最左边的几个数是这样的：0，1，3，8，21，…，问最右边的一个数除以6余几？

解　本题的难点在于如何求出这七十个数分别被6除的余数？如何寻找这些余数的规律？对此，抓住难点，深入理解题意，反复思考这七十个数之间的关系．易知，从第三数起，每个数都等于它左边一个数的3倍减去再左边的一个数．因此，每个数的大小都由与它邻近的左边的两数确定．

因为本题只要求得出最右边的一个数被 6 除的余数，所以在寻找规律时不必求出这些数本身，只须求出这些数除以 6 所得的余数．不难发现，这些余数也有类似的规律：从第三项起，每一数是它左边的一数的 3 倍减去再左边的一数(如果出现负数就加 6 ，超过 6 就减 6 ，得到以下各数：

0，1，3，2，3，1，0，5，3，4，3，5，0，1，….

显然，第13和第14两数分别与第 1 和第 2 两数相同，其余类推．说明上述各数每出现12个数后重复出现．因而，第72个数是 5 ，第71个数是 3 ，第70个数是 4 .

因此，在题目中的七十个数里，最右边的数被 6 除的余数是 4 .

四、严密思维，注重推理

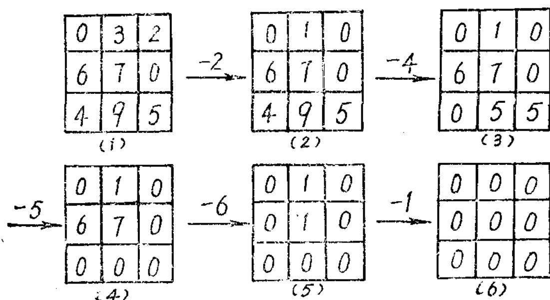
开展数学竞赛，目的在于开发智力，培养能力，发现和培养数学人才，选拔尖子，促进第二课堂的深入开展．因此，在竞赛试题中，考察参赛者的逻辑推理能力的题目占有一定的比例．这些题目，没有现成的公式可以直接套用，而必须进行严密的思维，严格的逻辑推理．

例 1 （第三阶段全俄中学生数学竞赛试题）

给定填满自然数的3×3的正方形表(图12—7(1))在每一步中，对于任意两个相邻的数加上同一个数(两个数认为是相邻的，若它们在方格表中有公共边)．经过若干步之后，能否得到：(i)表中所有的方格中都填上了零？(ii)表中四个角落的方格都填上 1 ，而其余五个方格都填上了零？

解 (i)所求的表经过五表之后能够得到．如图12—7(2)至(6)所指出的对应的各步．对于相邻两数的变换，所确定的

问题的运算步骤，用粗黑边框图分划出来；所加的数在箭头上已指出．



（图12—7）

(ii)观察上述六个表格，注意到每个表格中四个角落及中央的五格数之和与其余四格数之和，它们总是相等的，所以它们之差总是为0．今考虑一般形式的3×3表格，从左到右，设第一行的数分别是a，b，c；第二行是d，e，f；第三行是g，h，k、不难验证，如果这个表满足变换所确定的问题的运算条件，则数$s=(a+c+e+g+k)-(b+d+f+h)$不变、对于最初的表，这个数等于零．因而，在表中的四个角落的方格填1，而在其余的方格中填0，则数$s=4$．所以，由最初的表不可能得到要求的表．

例2　（第12届国际数学竞赛题）

找出具有下列性质的所有正整数n：集合$\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$可以划分为两个无公共元素的非空子集，使得一个子集中所有元素的积与另一个子集的所有元素之积相等．

解 设n是具有题述性质的正整数。

将$\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$划分成两个无公共元素的非空子集$A$，$B$。将$A$，$B$中的所有元素都分解成质因子之积。显然，集合$A$中所有元素之积与集合$B$中所有元素之积的标准分解式是相同的，也就是说，在集合A的一个元素所含质因子p，也应是集合B中某一元素的质因子，而这两个都含质因子p的数，其差的绝对值应等于p的倍数，又作为元素的六个连续自然数中任意两数之差的绝对值不大于5。从而，各数所含质因子只可能是2，3和5。易知，质因子5只能含在n与$n+5$中。所以，$n+1$，$n+2$，$n+3$，$n+4$这四个连续自然数的质因子只可能是2和3。

这四个连续自然数中必有两个奇数，都不含质因数2，因此，这两个连续奇数就只能是3的倍数了，因而其差也是3的倍数．但其差实为2或-2．显然这是不可能的．故具有题述性质的正整数n不存在。

附录一

简介国际数学奥林匹克竞赛

现代的数学奥林匹克主要是指中学生的数学竞赛．最早举办中学生数学竞赛的是匈牙利．1894年，匈牙利“物理一数学协会”慎重地通过一项决议：为中学生举办数学竞赛．从此之后，除了在两次世界大战中和匈牙利事件期间中断过七年外，每年十月都要举行，一直至今．数学竞赛为匈牙利选拔了不少的优秀数学人才，使得匈牙利成为一个在数学上享有盛誉的国家．同时，也引起了欧洲其他国家的兴趣，争相仿效．1902年，罗马尼亚首先由《数学杂志（*Gazeta matewatica'*）》组织竞赛，1948—1950年扩大了规模．1934—1935年苏联在列宁格勒、莫斯科也举办竞赛，延续至今．数学竞赛的大兴起是五十年代．据不完全统计，现在举办全国性数学竞赛的国家有：保加利亚（1949年开始）、波兰（1950年开始）、捷克斯洛伐克（1951年开始）、中国（1956年开始）、德意志民主共和国（1961年开始）、苏联（1962年开始）、越南（1962年开始）、南斯拉夫（1962年开始）、荷兰（1962年开始）、蒙古（1963年开始）、英国（1965年开始）、芬兰（1965年开始）、以色列（1968年开始）、加拿大（1969年开始）、希腊（1969年开始）、德意志联邦共和国（1970年开始）、澳大利亚（1971年开始）、美国（1972年开始）等．

由于数学竞赛与体育比赛在精神上有相通之处，所以大

多数国家的数学竞赛都叫数学奥林匹克。并且也象奥运会一样，从1959年起开始有了"国际数学奥林匹克"(*International Mathematics Olympic*)，简称*IMO*。

*IMO*起先只是东欧几个国家轮流做东举办，并没有多少国际性，到60年代末才渐渐地扩大到西方国家。1988年7月在澳大利亚首都堪培拉举行的第29届国际数学奥林匹克竞赛，已涌有49个国家和地区的268名中学生参加。它是当今世界上层次最高、影响最大的国际中学生知识智力竞赛。

现在的*IMO*仍然是轮流做东，没有固定的组织与章程，只是每年都由参加国各举一人，组成委员会，东道国代表任主席。每次竞赛都在七月份举行。试题分两试共六题。第一天上午用$4\frac{1}{2}$小时做第一试的三道题，第二天上午又用$4\frac{1}{2}$小时再做第二试的三道题。通常是每题7分，满分为42分，试题在各国提出的题目中挑选。一般认为最初几届的试题难度不大，但七十年代以后显著地难了。1980年的21届未能举行，而以两个小规模的竞赛代替，奇怪的是两者试题的难度极悬殊。1981年在美国举行，试题很难，成绩却出奇地好。近年来，竞赛试题大都涉及多项式、函数、不等式、几何、初等数论、组合数学等内容。

*IMO*虽然不计团体名次，但各国都把自己的总分作为分析成绩的依据。一般地，每个参竞国都派六名学生参加每届的竞赛，因而各国的总分为$6\times7\times6=252$分。1985年，我国派出两名代表试探性地参加了当年在芬兰举行的第26届*IMO*，这次成绩不够理想，位居团体总分第16名，居中下水平，落于越南、蒙古之后。代表回国后，从各方面认真总结了经

验教训，在中国数学会普及工作委员会的具体组织下，通过多种形式的选拔和培养，采取民主的方式确定出六名代表正式参加了第27届IMO竞赛，取得了好成绩。第27届的考分情况是：美、苏均为203分、联邦德国196分、中国177分、民主德国172分、罗马尼亚171分、保加利亚161分、匈牙利151分、捷克斯洛伐克149分、越、南146分、英国141分、法国131分等；第28届的考分情况是：罗马尼亚250分、联邦德国248分、苏联235分、民主德国、美国、匈牙利、保加利亚、中国200分等；第29届的考分情况是：苏联217分、中国、罗马尼亚均是201分、联邦德国174分、越南166分、美国153分等。

我国代表队在第26、27、28、29届IMO竞赛中获奖名单如下表：

届次	参赛时间	地点	代表队人数	获奖人数	获奖者姓名	性别	年级	所在中学	获奖等次
26	1985.7	芬兰赫尔辛基	2	1	吴思皓	男	高二	上海向明中学	三等
27	1986.7	波兰华沙	6	5	方为民	男	高三	河南省实验中学	一等
					张浩	男	高三	上海大同中学	一等
					李平立	男	高三	天津南开中学	一等
					荆秦	女	高三	西安85中学	二等
					林强	男	高二	湖北黄岗中学	三等
28	1987.7	古巴哈瓦那	6	6	滕峻	女	高三	北京大学附中	一等
					刘雄	男	高三	湖北湘阴一中	一等
					潘子刚	男	高三	上海向明中学	二等
					林强	男	高三	湖北黄岗中学	二等
					高峡	男	高三	北京大学附中	三等
					何建勋	男	高三	华南师大附中	三等

续表

届次	参赛时间	地　点	代表队人　数	获奖人数	获奖者姓　名	性别	年级	所在中学	获奖等次
29	1988.7	澳大利亚堪培拉	6	6	何宏宇	男		四川彭县中学	一等
					陈　晞	男		上海复旦附中	一等
					韦国恒	男		武钢三中	二等
					王健梅	女		天津南开中学	二等
					查宇涵	男		南京10中	二等
					邹　铜	男		江苏镇江一中	二等

美国是西方工业国家中较晚举办全国性数学竞赛的一个。1956年起，美国国内开始有人呼吁搞全国性数学竞赛，经过了六年才实行。现在，美国全国数学竞赛的水平公认是不错的。迄今为止，美国的中学生数学竞赛有四：

一、美国中学数学竞赛(AHSME)。

1950年，美国数学协会首次举行中学生数学竞赛，参加对象仅限于纽约近郊地区。到1957年，这样的数学竞赛开始发展为全国性的竞赛，由美国数学协会和保险统计员协会等联合举办。1960年，参加竞赛的学生来自5200所学校，这个竞赛几乎在美国的每个州和加拿大的每个人口稠密的省份都进行。现在，该竞赛已发展为国际性的比赛，参加者除美国外，还有加拿大、爱尔兰、澳大利亚、卢森堡、比利时、匈牙利、意大利、波多黎各、牙买加等。1985年参加竞赛的学生超过380000，他们分别来自各个国家和地区的5917所学校。

美国中学数学竞赛的范围完全以标准的中学课程为基础，它面向中学的几种不同水平的学生，而不是只为高能力的学生服务。

美国中学数学竞赛试题全部采用选择题的形式，题目由美国数学协会选定、印刷，然后邮寄到各校，考题的第一、二部分，针对学生掌握概念的程度，考查学生有关的基本知识和基本技能；第三、四部分则超越了学校教学大纲的要求，考查一些具有探索性、提高性的问题。从1974年起，竞赛试题是30道选择题，并规定在90分钟内完成，每题给出5个供选择的答案，其中有一个且仅有一个是正确的。在1985年之前，评分方法是每人先有30分的底数，然后每答对一题得4分，每答错一题扣1分，未回答的题既不得分也不失分。如全对者，则加120分，得满分150分。在1986年中，采用新的评分方法：每一题答对者得5分，不答者得2分，答错者得0分，满分仍为150分。

竞赛结束后，各学校按考试分数分别评定名次，并由美国数学协会统一掌管光荣册的登记工作。凡考生的成绩大于或等于100分的，都可载入光荣册。光荣册不仅是一种荣誉，也是大学录取学生的重要依据，大学数学专业可根据光荣册选录学生。

自1983年起，我国北京和上海的中学生参加了这项国际性的数学竞赛，1986年天津市的中学生也已正式参加。在1983年3月1日举行的第34届美国中学数学竞赛中，获得满分者有两名：上海一名（建设中学车晓东同学），美国一名。在1984年2月28日举行的第35届竞赛中，获得满分者有四名，其中北京两名、上海一名、美国一名。在1985年2月26日的

第36届美国中学数学竞赛中，获得满分者有三名，其中美国一名，英国二名．在这一届，上海复旦大学附中以420分（即该校最高分的三名考生的得分之和）的优异成绩荣获学校优胜者载入光荣册．

二、美国数学邀请赛（AIME）．

在1982年以前，美国中学数学竞赛是作为美国数学奥林匹克的资格赛．通过中学数学竞赛，选出100名左右选手参加美国数学奥林匹克．然后，再从中选出参加当年的国际数学奥林匹克的选手．在总结前一时期竞赛的基础上，以及考虑到采用选择题的命题方式，虽然有它的很多优点，但也有它的局限性，为了更全面、更准确地培养和考察学生，在美国中学数学竞赛和美国数学奥林匹克这两者之间，一个美国数学邀请赛诞生了．这样，美国数学邀请赛就成为参加美国数学奥林匹克的资格赛．

1983年3月22日举行了第一届美国数学邀请赛，凡是在美国中学数学竞赛中，得分为大于或等于95分的学生均被邀请参加该竞赛．1986年，又有新的规定：凡在第37届美国中学数学竞赛中，得分大于或等于100分的学生被邀请参加第四届美国数学邀请赛．

美国数学邀请赛的试题由美国数学协会命题，共15道填空题，每题1分，满分为15分，每题的答案均不超过999的正整数，要求应试者在2.5小时内完成（1985年的第三届美国数学邀请赛的考试时间改为3小时）．邀请赛的试题新颖别致，内容广泛，其中有些题目具有较高的抽象性和灵活性，要求学生具有一定的逻辑思维、推理论证、空间想象和分析

问题解决问题的能力.

在第三届美国数学邀请赛中，有各个国家和地区的625所中学的932名学生参加．竞赛结果，凡是得分大于或等于8分的学生将取得公认的美国数学邀请赛证书.

三、美国数学奥林匹克(USAMO)

自1972年起，已举行多届了．1983年以后，凡在美国数学邀请赛中，得分大于或等于8分的学生将被邀请参加这种竞赛．美国数学奥林匹克是美国国内水平最高的，且在国际上有一定影响的数学竞赛．每次竞赛的试题有5道，要求在3.5小时内完成．对优胜者再进行数学奥林匹克训练，最后从中选出6名学生作为美国国家队队员参加国际数学奥林匹克竞赛.

四、美国初中数学竞赛(AJHSME)

1985年12月10日举行了第一届美国初中数学竞赛．它是由美国数学协会等六个单位联合举办的．参加的对象是7年级和8年级的学生．命题范围是7、8年级的数学课程包含的若干内容(但不包括极限)．如：算术中的整数、分数、小数；比和比例；数论；简单的几何，周长，面积，体积；概率与统计；逻辑推理.

竞赛试题是25道选择题，并规定在40分钟内完成，对随机猜测答案不予惩罚．这次竞赛有美国、加拿大等国家和地区的15万学生参加．上海赛区已在1986年参加了第二届美国初中数学竞赛.

由于中学数学竞赛的组织成功，这股风刮到大学里，现

在已有一些国家也办大学生(主要是低年级)的数学竞赛．美国从1938年起就有一个大学低年级学生的数学竞赛——普特南(William Lowell Putnam)竞赛，远远先于其他国家．

普特南曾任哈佛大学校长．1933年退休，1935年逝世．他留下了一笔基金，两个儿子就与全家的挚友、著名美国数学家G．D．伯克霍夫商量，举办了一个数学竞赛．伯克霍夫强调说，再没有一个学科能比数学更易于通过考试来测定能力了．首届竞赛在1938年举行．以后，除了1943－1945年因大战停了两年，其余一般都在每年的11、12月举行．这个竞赛由美国数学会具体组织．为了保证竞赛质量，由一个三人委员会主办其事．三个委员是：波利亚(G.polya,1887－?，著名数学家、数学教育家、数学解题方法论的开拓者，曾主办过延续多年的斯坦福大学数学竞赛)、拉多(Tiber Rado，1895－1965，匈牙利数学竞赛的早期优胜者，对复变函数、测度论有重大贡献)、卡普兰斯基(Kaplansky,1917—?，著名的代数学家，第一届普特南竞赛的优胜者)。普特南竞赛的优胜者中，日后成名的很多，有三个人得到菲尔兹奖：米尔诺(Mitnor)、孟福德(Mumfard)、奎伦(Quillem)．有人说："伯克霍夫父子(儿子B．伯克霍夫是当代活跃的代数学家)是普特南家族的密友，这一点是美国低年级大学数学事业的幸运"．

1956年我国首次举行中学生数学竞赛．57、62、63、64年各举行了一次．1978年恢复举办全国中学生数学竞赛以来，每年举行一次高中数学竞赛．近几年来，又举办了全国初中数学竞赛．有一些省市还搞了小学生的数学竞赛．竞赛的规模越来越大，参加的人数也越来越多．数学竞赛已经成为我国

广大青少年所喜爱的课外活动，中小学生欢迎它，中小学教师欢迎它，中小学的行政领导和许多省市县的教育领导部门都欢迎它、支持它.

中学各科的竞赛中，数学竞赛尤其重要，不仅我们这么看，世界各国的实践也确认了这一点. 因为，数学是一门基础学科，是各门学科的基础. 过去，我们认为自然科学和工程技术离不开数学，但是今天的事实说明：社会科学、人文科学、艺术科学、语言科学都离不开数学. 任何一门学科，一旦与数学相结合，就说明这门学科正在日臻成熟和完善.另一方面，撇开具体的数学内容，从数学思维方法来说，抽象思维能力、逻辑思维能力以及空间想象力等方面的训练好与否，是衡量一个人的知识水平和文化素养的重要标志.因此，开展中学生数学竞赛，对于推动中学的数学课外活动，提高青少年的数学素养，从而为各门学科培养优秀人才，为提高全民族的文化素养都起着不可估量的作用. 有人问：你们搞数学竞赛是不是想再发现几个象华罗庚、吴文俊这样的大数学家？中国数学会普及委员会主任梅向明教授回答说：也是，也不是！他说：首先，我们搞数学竞赛的目的是提高青少年的数学思维能力，从而达到提高中华民族文化素质的目的. 因此，我们主要不是着眼于培养数学家；其次，我们的另一个目的是为各门学科培养和输送拔尖人才，其中也可能有少数人对数学有兴趣，将来有希望成为卓越的数学工作者，但主要是为所有学科输送具有良好数学素养的拔尖人才.

数学竞赛试题与学生在校学习时的考题大不一样，它有难度大、题型新、知识面广、解法巧妙等特点. 说得详细一点，竞赛题的基本特点是：多数竞赛题在知识内容方面，没

有超过中学数学教学大纲和教材规定的范围；在解题方法方面，也大多是教材中体现过的。个别题目需要应用某些专题的新知识或新的数学思想方法。一试题侧重于对基础知识、基本技能熟练程度的考查，只有基础知识全面、扎实，解题方法灵巧，才能快速、准确地得出答案。二试题往往新颖别致，侧重于对数学能力的考查，只有思维敏捷，思路正确，并具有某些专题知识，才能取得好成绩。

随着数学竞赛的开展，一个新名词——奥林匹克数学应运而生。它不是大学里所学的高等数学，因为它的内容并不超出中学或中学生所能接受的范围；它也不是中学数学，因为它有很多高等数学的背景，采用了很多高等数学中的方法。因此，它是一种起着桥梁作用的"中间数学"。它联系着中学数学与高等数学，很多新的内容、方法由它源源不断地输入中学，对于中学数学的教学改革，从思想内容到教师的素质都起着重要作用。国外，六十至七十年代的"新数学"运动效果不理想，其原因之一就是缺乏一个渐变阶段。如果将新的内容先在数学竞赛中进行试验，在培养尖子学生的奥林匹克学校或数学物理学校（外国有这样的学校，我国一些省市也有这样的学校）讲授，再逐步渗入中学，将是一种可行的办法，也是目前的一种潮流。

附录二

第29届IMO试题及解答

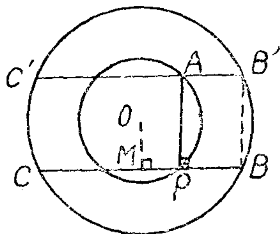
第　一　天

（堪培拉　1988年7月15日）

1．考虑在同一平面上半径为R与$r(R>r)$的两个同心圆．设P是小园周上的一个定点，B是大圆周上的一个动点，直线BP与大圆周相交于另外一点C．过点P且与BP垂直的直线l与小圆周相交于另一点A（如果l与小圆相切于P，则$A=P$）．

（1）求表达式$BC^2+CA^2+AB^2$所取值的集合．

（2）求线段AB的中点的轨迹．



（图附一1）

解．（1）如图附一1所示，设两圆圆心为O，过O作OM与BC垂直，且交BC于M．设$AP=2t$，因此$OM=t$．于是

$$BC=2BM=2\sqrt{R^2-t^2},$$

$$BP^2+CP^2=(BM-PM)^2+(BM+MP)^2$$
$$=2(BM^2+PM^2),$$

即　$$BP^2+CP^2=2(R^2-t^2)+2(r^2-t^2)$$
$$=2(R^2+r^2)-4t^2.$$

于是，$BC^2+CA^2+AB^2=BC^2+(PC^2+PA^2)+(BP^2+PA^2)$

$=BC^2+BP^2+CP^2+2PA^2=4(R^2-t^2)+2(R^2+r^2)-4t^2+2PA^2$

$=6R^2+2r^2-8t^2+2(2t)^2=6R^2+2r^2$.

这是一个常数，与B的位置无关(即使在$A=P$的特殊情况，表达式$BC^2+CA^2+AB^2$也是取同一值)，故表达式取值的集合为$\{6R^2+2r^2\}$.

(2) 过A作直线平行于CB，交大圆周于C'及B'两点，这时易见$PBB'A$为一矩形，因此线段AB的中点也就是线段PB'的中点。当B在大园周上变动一周时，B'也在大园周上变动一周。这说明，轨迹是以线段OP的中点为圆心，以$\frac{R}{2}$为半径的一个圆周。

2．设n为一正整数，且A_1，A_2，…，A_{2n+1}是某个集合B的子集。设

(a) 每个A_i恰含有$2n$个元素，

(b) $A_i\cap A_j(1\leqslant i<j\leqslant 2n+1)$恰含有一个元素，

(c) B中每一个元素属于至少两个子集A_i.

问：对怎样的值n，可以对B中的每一元素贴一张写有0或1的标签，使得每个A_i中恰含有n个贴上了写有0的标签的元素？

解：我们首先证明条件(a)、(b)、(c)合在一起，可以推出看起来比(c)更强的条件，即

(c') B中的每一元素恰好属于某两个子集A_i. 首先，我们有等式

$$A_1=(A_2\cap A_1)\cup(A_3\cap A_1)\cdots\cup(A_{2n+1}\cap A_1) \qquad (1)$$

上式左边的集合包含右边，那是显然的；条件(c)则说明上式的右边也包含着左边。

更一般的情况是

$$A_i=\bigcup_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{2n+1}(A_i\cap A_j) \qquad (2)$$

这里$j=1, 2, \cdots, 2n+1$。

如果说(c')不真，也就是说B中有一个元素a至少属于3个以上的子集，不妨设$a\in A_1\cap A_2\cap A_3$。这时由于(b)，

$$A_1\cap A_2=\{a\}, \quad A_1\cap A_3=\{a\}.$$

所以 $(A_1\cap A_2)\cup(A_1\cap A_2)=\{a\}$，并且对于$j>3$有$A_1\cap A_j$只有一个元素，由等式(1)知$A_1$中至多只有$2n-1$个元素，与条件$(a)$矛盾。这就证明了$(c')$成立。

这就是说，对具有性质(a)、(b)、(c)的集B而言，其中每一元素可与一个有两个自然数的数组相对应。具体地说，如$a\in B$且$a\in A_i\cap A_j$，则令a与(i, j)相对应，这里$i\neq j$且$i, j=1, 2, \cdots, 2n+1$。当然，(i, j)与(j, i)对应着同一的元素。

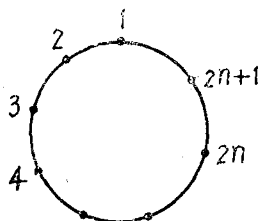
现在，设想能按照要求来贴标签，那么在上述数组中，恰有一半与0相对应，即有

$$\frac{1}{2}C_{2n+1}^{2}=\frac{(2n+1)(2n)}{4}=\frac{n(2n+1)}{2}$$

个与0对应，因此上述分数应为一自然数，因此，n必须为偶数。

反之，设n为偶数，我们来证明符合要求的贴标签的方

式是存在的．把一个圆周用$2n+1$个点等分成$2n+1$等份，在这些点上依次放着1，2，…，$2n+1$这些数字．对于$\{1, 2, \cdots, 2n+1\}$中任何两个不同的数i，j，看它们在圆周上较短的那一段距离，如果i与j之间隔着奇数段圆弧，那么给$A_i \cap A_j$中的那个元素贴上标签"1"，如果相隔偶数段，则贴上"0"。由于n为偶数，因此A_i中的元素有一半贴上了"0"；另一半贴上了"1"。



（图附-2）

3．N为正整数集．在N上定义函数f如下：

$f(1)=1$，$f(3)=3$，且对$n \in N$有

$f(2n)=f(n)$，

$f(4n+1)=2f(2n+1)-f(n)$，

$f(4n+3)=3f(2n+1)-2f(n)$．

问：有多少个$n \in N$，且$n \leqslant 1988$使得$f(n)=n$？

解：按照题设中的公式，我们可以求出相对于n的$f(n)$的数值如下表：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$f(n)$	1	1	3	1	5	3	7	1	9	5	13	3	11	7	15	1	17

这张表显示出的规律好像是

$f(2^k)=1$，$f(2^k-1)=2^k-1$，$f(2^k+1)=2^k+1$．

这就启发我们要讨论自然数的"二进制"展开式．我们的猜想是：

$f(n)=n$的二进制展开式的反向排列所形成的二进位数．

用归纳法来证明上述猜想．由于$f(2n)=f(n)$，所以只

须考虑n为奇数的情形。

如果n具有$4m+1$的形式，设

$$4m+1=\varepsilon_k 2^k+\cdots+\varepsilon_1 2+\varepsilon_0 1 \quad (\varepsilon_i=0,\ 1).$$

显然应有$\varepsilon_0=1$，$\varepsilon_1=0$，于是

$$4m=\varepsilon^k 2^k+\cdots+\varepsilon_2 2^2.$$

由此得

$$m=\varepsilon^k 2^{k-2}+\cdots+\varepsilon_3 2+\varepsilon_2.$$

故 $2m+1=\varepsilon^k 2^{k-1}+\cdots+\varepsilon_3 2^2+\varepsilon_2 2+1.$

由归纳假设可知

$$f(2m+1)=2^{k-1}+\sum_{i=2}^{k}\varepsilon_i 2^{k-1},$$

$$f(m)=\sum_{i=2}^{k}\varepsilon_i 2^{k-1}.$$

由此得出

$$f(4m+1)=2f(2m+1)-f(m)$$

$$=2^k+\sum_{i=2}^{k}\varepsilon_i 2^{k+1-i}-\sum_{i=2}^{k}\varepsilon_i 2^{k-1}$$

$$=2+\sum_{i=2}^{k}\varepsilon_i 2^{k-1}$$

$$=\sum_{i=0}^{k}\varepsilon_i 2^{k-1}$$

符合我们的猜想。

再设n具有$4m+3$的形式，仍设

$$4m+3=\sum_{i=0}^{k}\varepsilon_i 2^i.$$

显然，这时有$\varepsilon_0=\varepsilon_1=1$. 因此

$$4m=\sum_{j=2}^{k}\varepsilon_j 2_j,$$

$$m=\sum_{j=2}^{k}\varepsilon^j 2^{j-2},$$

$$2m+1=1+\sum_{j=2}^{k}\varepsilon_j 2^{j-1}.$$

于是，依定义及归纳假设

$$f(4m+3)=3f(2m+1)-2f(m)$$

$$=3\sum_{j=1}^{k}\varepsilon_j 2^{k-j}-2\sum_{j=2}^{k}\varepsilon_j 2^{k-j}$$

$$=2\sum_{j=1}^{k}\varepsilon_j 2^{k-j}+\sum_{j=1}^{k}\varepsilon_j 2^{k-j}-2\sum_{j=2}^{k}\varepsilon_j 2^{k-j}$$

$$=\varepsilon_1 2^k+\sum_{j=1}^{k}\varepsilon_j 2^{k-j} \qquad (\text{因为}\varepsilon_1=\varepsilon_0)$$

$$=\sum_{j=0}^{k}\varepsilon_j 2^{k-j}$$

这就完全证实了我们的猜想.

下面我们来讨论有$2m$位数字的二进位数

$$(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_m,\ y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_m),$$

当然，$x_1=1$. 如果这个数具有性质：

$$(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_m,\ y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_m)$$

$$=(y_m,\ y_{m-1},\ \cdots,\ y_1,\ x_m,\ x_{m-1},\ \cdots,\ x_1),$$

我们称之为对称的. 这表明：对称的二进位数完全由前

面m位数字x_1，x_2，…，x_m所决定．由于$x_1=1$，而x_2，…，x_m中的每一个可在0，1两个数字中任取．由此可见，具有$2m$位数字的对称的二进位数有且只有2^{m-1}个．

且有$2m-1$位数字的对称的二进位数也可由明显的方式定义，这种数的个数也可被证明为是2^{m-1}．

最后看在从1到1988之间有多少个数可表为对称的二进位数．由于$1024<1988<2048$，即$2^{10}<1988<2^{11}$．因此，在小于2048的正整数中，可表为对称的二进位数的个数是

$$1+1+2+2+4+4+8+8+16+16+32=94.$$

事实上，$1988=(11111000100)_2$，可见超过这个数的11位的对称二进位数只有两个：

$$(11111011111)_2,\ (11111111111)_2.$$

所以有$94-2=92$个不超过1988的自然数n，使得$f(n)=n$。

第 二 天

（堪培拉　1988年7月16日）

4　证明：满足不等式

$$\sum_{k=1}^{70}\frac{k}{x-k}\geqslant\frac{5}{4}$$

的实数x的集合是互不相交的区间的并集，并且这些区间长度的总和等于1988．

证明． 令$f(x)=\sum_{k=1}^{70}\frac{k}{x-k}-\frac{5}{4}$．

当$x<1$时，$f(x)<0$，在$(-\infty,1)$中不等式没有解．易

见，对$n=1, 2, 3, \cdots, 70$，有

$$\lim_{x\to n+0} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to n-0} f(x) = -\infty,$$

且 $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\frac{4}{5}.$$

可见方程$f(x)=0$在$(1, 2)$，$(2, 3)$，$\cdots$，$(69, 70)$，$(70, +\infty)$各区间中，每一区间内有一根，依次记为x_1，x_2，$\cdots$，x_{70}。讨论方程

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-70)f(x)=0 \qquad (1)$$

显然，x_1，x_2，$\cdots$，x_{70}是(1)的根。由于(1)的左边为70次的代数多项式，故至多有70个根。这表明x_1，x_2，$\cdots$，x_{70}是$f(x)=0$在对应区间中的唯一根。由此，不等式$f(x)\geqslant 0$的解集是

$$(1, x_1]\cup(2, x_2]\cup\cdots\cup(70, x_{70}],$$

它们的长度和为

$$\sum_{i=1}^{70}(x_i-i)=\sum_{i=1}^{70}x_i-\sum_{i=1}^{70}i.$$

由根与系数的关系可知，Σx_i为多项式

$$\frac{4}{5}(x-1)\cdots(x-70)f(x)$$

的x^{69}的系数，即

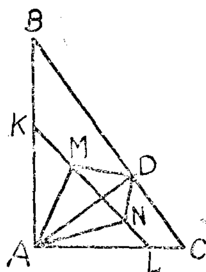
$$(1+2+\cdots+70)\left(1+\frac{4}{5}\right).$$

因此，区间长度之和为

$\frac{4}{5}(1+2+\cdots+70)$

$=4\times7\times71=1988$。

5．在直角三角形ABC中AD是斜边BC上的高，连结三角形ABD的内心与三角形ACD的内心的直线分别与边AB及边AC相交于K及L两点，三角形ABC与AKL的面积分别记为S与T。求证：$S\geqslant 2T$。



（图附-3）

证明：设$\triangle ABD$的内心为M，$\triangle ACD$的内心为N。由于$\triangle ADB\sim\triangle CDA$，注意到$DM$与$DN$为由$D$出发的两条分角线，故有

$$\frac{DM}{DN}=\frac{BD}{AD},$$

并且显然有$\angle MDN=90°$。从而$\triangle NMD$与$\triangle ABD$直接相似。因此，两个三角形对应边的交角相等，例如说，NM与AB的交角应同DM与DA的交角相等，即$\angle LKA=\angle BDM=45°$。这样便知$\triangle ALK$为等腰直角三角形。又由$\triangle AMK\cong\triangle AMD$，故$AK=AD=AL$。于是

$$S=\frac{1}{2}AB\cdot AC,$$

$$T=\frac{1}{2}AK\cdot AL=\frac{1}{2}AD^2=\frac{1}{2}\frac{AB^2AC^2}{AB^2+AC^2}.$$

因此，$\dfrac{S}{2T}=\dfrac{AB^2+AC^2}{2AB\cdot AC}\geqslant 1$，

即　　$S\geqslant 2T$.

6. 正整数a与b使得$ab+1$整除a^2+b^2。

求证：$\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}$是某个正整数的平方.

证法一、由于a，b在表达式$\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}$中是对称的，不妨设$a\geqslant b$. 当$a=b$时，有正整数q使

$$\frac{2a^2}{a^2+1}=q.$$

由此得$(2-q)a^2=q$.

由此可知只能有$q=1$，这时$a=b=1$.

主要讨论$a>b$.

令s与t是满足下列条件的整数：

$$\begin{cases} a=bs-t & (1)\\ s\geqslant 2,\ 0\leqslant t<b & (2)\end{cases}$$

将(1) 代入$\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}$中，得出

$$\frac{b^2s^2-2bst+t^2+b^2}{b^2s-bt+1} \tag{3}$$

易证上式大于$s-1$但小于$s+1$. 证明的 方法是：去掉分母，注意利用(2)中的两式即可. 由于表达式(3)是一个正整数，故必等于s. 由 此 得出$\dfrac{b^2+t^2}{bt+1}=s$.即

$$\frac{a^2+b^2}{ab+1}=\frac{b^2+t^2}{bt+1}.$$

注意，这里$a>b>t$．如果$t=0$，那么得知原式为正整数b的平方．否则，可以再仿此作下去．进行有限步之后，总可以得到最小的那个数会变0，因此原表达式是一个完全平方数．

证法二、令 $\frac{a^2+b^2}{ab+1}=k$.

假设k不是平方数．讨论不定方程

$$a^2-kab+b^2=k \tag{1}$$

显然，这个不定方程的解(a, b)不会使$ab<0$，否则$-ab\geqslant 1$，这会导致

$$a^2+b^2\leqslant 0.$$

设(a, b)是(1)的解中适合$a>0$，$b>0$且使$a+b$最小的那个解．设$a\geqslant b$。固定k与b，把(1)看成a的二次方程，它有一根为a，设另一根为a'．由根与系数的关系可知

$$\begin{cases} a+a'=kb, & (2) \\ aa'=b^2-k & (3) \end{cases}$$

由(2)知a'为整数，由(3)知$a'\neq 0$，否则k为平方数，与假设不合．由于$a>0$，故$a'>0$，有

$$a'=\frac{b^2-k}{a}\leqslant\frac{b^2-1}{a}\leqslant\frac{a^2-1}{a}<a.$$

这时(a', b)为(1)的解，$a'>0$，$b>0$，但$a'+b<a+b$。这与(a, b)的选法不合，得出矛盾，所以k必为平方数．

1988年全国高中联赛试题解答

第　一　试

（10月16日上午8:00——9:30）

一、选择题（每小题有一个正确答案，选对得　分）

1．设有三个函数，第一个是$y=\varphi(x)$，它的反函数就是第二个函数，而第三个函数的图象与第二个函数的图象关于直线$x+y=0$对称，那么第三个函数是

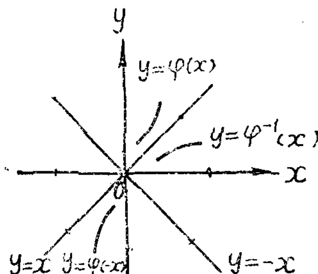
(A) $y=-\varphi(x)$,

(B) $y=-\varphi(-x)$,

(C) $y=-\varphi^{-1}(x)$,

(D) $y=-\varphi^{-1}(-x)$.

答(B)。



（图附-4）

利用图附-4，易知，第三个函数与$y=f(x)$关于原点成中心对称，即$y=-\varphi(-x)$。

2．已知原点在椭圆

$$k^2x^2+y^2-4kx+2ky+k^2-1=0$$

的内部，那么参数k的取值范围是

(A) $|k|>1$,　　(B) $|k|\neq1$,

(C) $-1<k<1$,　(D) $0<|k|<1$.

答(D)。　　令 $f(x, y)=k^2x^2+y^2-4kx+2ky+k^2-1$

则当点$p(x_0, y_0)$在椭圆内部时有$f(x_0, y_0)<0$。因而$f(0, 0)=k^2-1<0$，即$0<|k|<1$。

3．平面上有三个点集M、N、P：

$$M=\{(x, y)\,|\,|x|+|y|<1\},$$

$$N=\{(x, y)\,|\,\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2}+\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2}<2\sqrt{2}\},$$

$$P=\{(x, y)\,|\,|x+y|<1,\ |x|<1,\ |y|<1\}.$$

则 (A) $M\subset P\subset N$，(B) $M\subset N\subset P$，

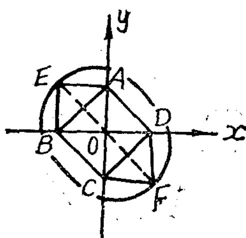
(C) $P\subset N\subset M$，(D) (A)、(B)、(C)都不成立。

答(A)。如图附-5。

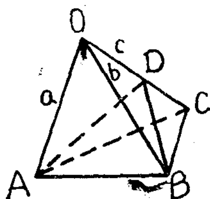
集M是正方形$ABCD$的内部；集P是六边形$AEBCFD$的内部，故$M\subset P$。

集N是以$Q_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$及$Q_2\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$为焦点，长半轴为$\sqrt{2}$的椭圆内部．易知点$E$、$F$在椭圆上(因$EQ_1+EQ_2=\frac{1}{2}\sqrt{2}+\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2}$)，点$A$、$B$、$C$、$D$在椭圆内部（因$AQ_1+AQ_2=\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}<2\sqrt{2}$)，故$P\subset N$。

4．已知三个平面α、β、γ，每两个平面之间的夹角都



（图附-5）



（图附-6）

是θ，且$\alpha\cap\beta=a$，$\beta\cap\gamma=b$，$\gamma\cap\alpha=c$。若有

命题甲：$\theta>\frac{1}{3}\pi$，

命题乙：a，b，c相交于一点。

则（A）甲是乙的充分条件但不必要；

（B）甲是乙的必要条件但不充分；

（C）甲是乙的充分必要条件；

（D）（A）、（B）、（C）都不对。

答（C）。三个平面α，β，γ两两的交线a，b，c有两种可能：或者a，b，c两两平行，或者a，b，c交于一点。

若命题甲成立，则a，b，c不能两两平行。事实上，若$a\parallel b$，$b\parallel c$，则可作一直三棱柱，使其侧面分别在α，β，γ平面上。此三棱柱的底面三角形的每个内角是α、β、γ中某两个平面的二面角，即此三角形的每一内角都等于θ，而$\theta>\frac{1}{3}\pi$，这是不可能的。这就证得：若命题甲成立，则a，b，c交于一点，即甲是乙的充分条件。

若命题乙成立，如图附-6所示。设a，b，c交于O。由于

平面α、β、γ两两交角都是θ，故可作一三棱锥$O-ABC$，使底面$\triangle ABC$是一正三角形，而棱锥的侧面分别在α、β、γ上。过AB作平面$ABD\perp OC$(即直线c)，交OC于D。由于BC是直角$\triangle BCD$的斜边，所以$BC>BD$。同理$AC>AD$。于是，在$\triangle ABD$中，$AB>AD$，$AB>BD$，因而$\angle ADB>\frac{1}{3}\pi$。而由作图知$\angle ADB=\theta$，即$\theta>\frac{1}{3}\pi$，故命题甲成立，即甲是乙的必要条件。

5．在坐标平面上，纵横坐标都是整数的点叫做整点．我们用I表示所有直线的集合，M表示恰好通过一个整点的直线的集合，N表示不通过任何整点的直线的集合，P表示通过无穷多个整点的直线的集合．那么表达式

(1) $M\cup N\cup P=I$，(2) $N\neq\phi$，

(3) $M\neq\varnothing$，(4) $P\neq\varnothing$。

中正确的表达式的个数是

(A) 1，(B) 2，(C) 3，(D)4.

答(D)．设K为无理数，则直线$y=kx+\frac{1}{2}$不过任何整点(因当x为整数时，y为无理数或$\frac{1}{2}$)故$N\neq\varnothing$，即(2)正确．直线$y=kx$只有一个整点(0，0)故$M\neq\varnothing$．直线$x=0$上显然有无穷多个整点，故$P\neq\varnothing$．于是(2)，(3)，(4)都是正确的．下面再证(1)成立．

事实上，任取一直线l，若l不过任何整点，则$l\in N$；若l恰好过一个整点，则必$l\in M$；若l过二个或多于二个整点，则$l\in P$。因为只要设(a,b)、(c,d)是l上的两个整点，若$a=c$，

则l的方程是$x=a$,此时$l\in P$。若$a\neq c$，则l的方程是$y=\frac{d-b}{c-a}(x-a)+b$。

当$x=n(c-a)+a$(n为整数),y也是整数，故$l\in P$。这就证得(A)正确。

二、填空题（本大题共4小题，每小题10分）

1．设$x\neq y$，且两数列x，a_1，a_2，a_3，y和b_1，x,b_2,b_3，y，b_4均为等差数列，那么$\frac{b_4-b_3}{a_2-a_1}=$________。

答：$2\frac{2}{3}$。

事实上,设第一及第二个等差数列的公差分别为d_1及d_2，则$y-x=4d_1$,$y-x=3d_2$(因$y\neq x$,d_1、$d_2\neq 0$),故$d_1=\frac{3}{4}d_2$。

又 $b_4-b_3=2d_2$，　　$a_2-a_1=d_1$，所以

$$\frac{b_4-b_3}{a_2-a_1}=\frac{2d_2}{d_1}=\frac{8}{3}.$$

2．$(\sqrt{x}+2)^{2n+1}$的展开式中，x的整数次幂的各项系数之和为________。

答：$\frac{1}{2}(3^{2n+1}+1)$。　　　实事上，

由二项式定理，得

$(\sqrt{x}+2)^{2n+1}=C_{2n+1}^{0}2^{2n+1}+C_{2n+1}^{1}2^{2n}\sqrt{x}+C_{2n+1}^{2}2^{2n-1}x+\cdots$，

$(\sqrt{x}-2)^{2n+1}=-C_{2n+1}^{0}2^{2n+1}+C_{2n+1}^{1}2^{2n}\sqrt{x}-C_{2n+1}^{2}2^{2n-1}x+\cdots$。

则知要求的和为

$$C_{2n+1}^{0}2^{2n+1}+C_{2n+1}^{2}2^{2n-1}+\cdots$$

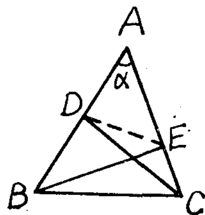
$$=\frac{1}{2}[(\sqrt{x}+2)^{2n+1})-(\sqrt{x}-2)^{2n+1}]_{(x=1)}$$

$$=\frac{1}{2}(3^{2n+1}+1).$$

3．在$\triangle ABC$中，已知$\angle A=\alpha$，CD、BE分别是AB、AC上的高，则$\frac{ED}{BC}=$________。

答：$|\cos\alpha|$． 事实上，

设α是锐角，如图附—7，连接DE，由题设知B、C、E、D四点共圆．于是$\angle AED=\angle ABC$，$\angle A$是公共角，则$\triangle ADE\sim\triangle ACB$．从而$\frac{DE}{BC}$



（图附-7）

$$=\frac{AD}{AC}=\cos\alpha;$$

若α是直角，E、D重合于A，$DE=0=\cos90°$；

若α是钝角，BE、CD在$\triangle ABC$之外，这时有

$$\frac{DE}{BC}\cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha.$$

4．甲、乙两队各出7名队员按事先排好的顺序出场参加围棋擂台赛，双方先由1号队员比赛，负者被淘汰，胜者再与负方2号队员比赛，……，直到有一方队员全被淘汰为止，另一方获得胜利，形成一种比赛过程．那么所有可能出

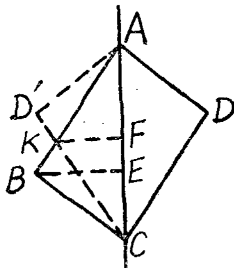
现的比赛过程的种数为________.

答：3432种．事实上，

依题设规定，一次擂台赛最多可赛13盘．若甲队胜，必胜7盘，故一切可能的情形有C_{13}^{7}种；若乙队胜，也有C_{13}^{7}种情形．则种数总共有$2C_{13}^{7}=3432$.

三（15分） 长为$\sqrt{2}$，宽为1的矩形，以它的一条对角线所在的直线为轴旋转一周，求得到的旋转体的体积.

解：如图附—8，D'点是D点关于AC的对称点，CD'交AB于K，分别作$BE\perp AC$，E为垂足，$KF\perp AC$，垂足为F.



（图附-8）

设$AB=\sqrt{2}$，$BC=1$，则

$$AC=\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{3},$$

$$BE=\frac{AB\cdot BC}{AC}=\frac{\sqrt{6}}{3},$$

$$KF=\frac{BC\cdot AF}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{4}.$$

设$\triangle ABC$、$\triangle ADC$、$\triangle AKC$绕直线AC旋转所成旋转体的体积分别为V_1，V_2，V_3，则

$$V_1=V_2=\frac{1}{3}\pi\cdot AC\cdot BE^2=\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi;$$

$$V_3=\frac{1}{3}\pi\cdot AC\cdot KF^2=\frac{\sqrt{3}}{8}\pi.$$

因此，所求体积$V = V_1 + V_2 - V_3 = \frac{23\sqrt{3}}{72}\pi$。

四 （15分）复平面上动点Z_1的轨迹方程为$|Z_1 - Z_0| = |Z_1|$，Z_0为定点，$Z_0 \neq 0$，另一个动点Z满足$Z_1 Z = -1$，求点Z的轨迹，指出它在复平面上的形状和位置。

解、由$Z_1 Z = -1$，得$Z_1 = -\frac{1}{Z}$,代入$|Z_1 - Z_0| = |Z_1|$,

$$得\left|\frac{1}{Z} + Z_0\right| = \left|\frac{1}{Z}\right|.$$

两边乘以$\left|\frac{Z}{Z_0}\right|$，得

$$\left|Z + \frac{1}{Z_0}\right| = \left|\frac{1}{Z_0}\right|.$$

因Z_0是复常数，这是以$-\frac{1}{Z_0}$为圆心，$\left|\frac{1}{Z_0}\right|$为半径的圆。

又$Z = 0$在此圆上，但由题设$Z_1 Z = -1$，故$Z \neq 0$，于是，所求轨迹应是去掉原点的上述圆。

五（15分）已知a，b为正实数，且$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$

试证：对每一个$n \in N$，$(a+b)^n - a^n - b^n \geqslant 2^{2n} - 2^{n+1}$。

证明：由$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$得　$ab = a + b$。　又因

$$(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 2 + \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geqslant 4,$$

故 $ab = a + b \geqslant 4$.

令 $S = (a+b)^n - a^n - b^n$

$= C_n^1 a^{n-1}b + \cdots + C_n^k a^{n-k}b^k + \cdots + C_n^{n-1} ab^{n-1}$

$= C_n^{n-1} ab^{n-1} + \cdots + C_n^{n-k} a^k b^{n-k} + \cdots + C_n^1 a^{n-1}b$

因为 $C_n^k = C_n^{n-k}$,

所以 $2S = C_n^1(a^{n-1}b + ab^{n-1}) + \cdots + C_n^k(a^{n-k}b^k + a^k b^{n-k}) + \cdots + C_n^{n-1}(ab^{n-1} + a^{n-1}b)$

$\geqslant C_n^1(2\sqrt{a^nb^n}) + \cdots + C_n^k(2\sqrt{a^nb^n}) + \cdots C_n^{n-1}(2\sqrt{a^nb^n})$

$= 2(ab)^{\frac{n}{2}}(C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^{n-1})$

$\geqslant 2 \cdot 4^{\frac{n}{2}}(2^n - 2) = 2^{2n+1} - 2^{n+2}$.

即 $S \geqslant 2^{2n} - 2^{n+1}$.

注：本题亦可用数学归纳法证明.

第 二 试

(10月16日上午10:00—12:00)

一(35分) 已知 $a_1 = 1$, $a_2 = 2$,

$$a_{n+2} = \begin{cases} 5a_{n+1} - 3a_n, & a_n \cdot a_{n+1}\text{为偶数时;} \\ a_{n+1} - a_n, & a_n \cdot a_{n+1}\text{为奇数时。} \end{cases}$$

试证： 对一切$n\in N$，$a_n\neq 0$。

证法一、 首先分析数列$\{a_n\}$的奇偶性规律。

由于$a_1=1$是奇数，$a_2=2$是偶数，$a_1a_2=$偶数，所以$a_3=5a_2-3a_1=5\times$偶数$-3\times$奇数$=$奇数($a_3=7$)。

因$a_2\cdot a_3=$偶数，则$a_4=5a_3-3a_2=$奇数($a_4=29$)。

又因$a_3\cdot a_4=$奇数，则$a_5=a_3-a_4=$偶数。

同理，$a_6=$奇数，…。

由此可见，数列$a_1,a_2,a_3,\cdots$，的奇偶性排列规律是：奇、偶、奇、奇、偶、奇、偶、奇、奇、…、即a_{3k}，a_{3k+1}都是奇数，a_{3k+2}都是偶数。

记$A_1=\{3k+1\mid k\in Z\}$，

$A_2=\{3k+2\mid k\in Z\}$。

下面用归纳法证明：对一切$k\in N$，有

$$\begin{cases}a_{3k}\in A_1\\ a_{3k+1}\in A_2\end{cases}\quad\text{或}\begin{cases}a_{3k}\in A_2\\ a_{3k+1}\in A_1\end{cases}\qquad (*)$$

当$k=1$时，$a_3=7=3\times2+1\in A_1$，

$a_4=29=3\times9+2\in A_2$。

设$k=n$时，$a_{3n}\in A_1$，$a_{3n+1}\in A_2$。

令$a_{3n}=3p+1$，$a_{3n+1}=3q+2$（以下p、q、r、$l\in Z$），由前述奇偶性规律，有

$$a_{3n+2}=a_{3n+1}-a_{3n}=(3q+2)-(3p+1)$$
$$=3(q-p)+1=3r+1\quad(r=q-p).$$

则
$$a_{3n+3}=5a_{3n+2}-3a_{3n+1}=5(3r+1)-3(3q+2)$$
$$=3(5r-3q-1)+2=3l+2\in A_2(l=5r-3q-1),$$

$$a_{3n+4}=a_{3(n+1)+1}=5a_{3n+3}-3a_{3n+2}$$

$$=5(3l+2)-3(3r+1)=3(5l-3r+2)+1\in A_2.$$

同理可证：若$a_{3n}\in A_2$，$a_{3n+1}\in A_1$，　　　则

$$a_{3(n+1)}\in A_1,\ a_{3(n+1)+1}\in A_2.$$

这就证得对一切$k\in=N$，（＊）成立.

最后证明$a_n\neq 0$. 事实上，若$a_n=0$，由于0是偶数，故$n=3k+2$，从而

$$0=a_{3k+2}=a_{3k+1}-a_{3k}$$

这与（＊）矛盾.

证法二、数列a_1，a_2，a_3，…的奇偶性规则分析如证法一所述. 下面证明：对一切$n\in N$，a_n不是 4 的倍数.

假设对某个$m\in N$，$a_m=4p(p\in Z)$，且这里m取使$a_k=4p$成立的最小下标，由于$a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=7$，所以$m>3$.

由于$a_m=4p$是偶数，据奇偶性规则可知，a_{m-1}，a_{m-2}为奇数，从而a_{m-3}为偶数. 于是

$$a_{m-1}=5a_{m-2}-3a_{m-3},$$

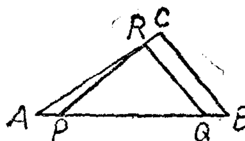
则
$$\begin{aligned}3a_{m-3}&=5a_{m-2}-a_{m-1}\\&=4a_{m-2}-(a_{m-1}-a_{m-2})\\&=4a_{m-2}-a_m=4(a_{m-2}-p).\end{aligned}$$

由 3 与 4 互质，故a_{m-3}是 4 的倍数，这与m取最小下标矛盾.

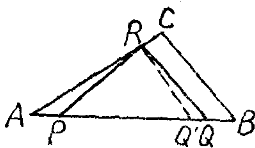
由于a_n不是 4 的倍数，而0是4的倍数，故$a_n\neq 0(n\in N)$.

注：证法二中取最小下标m，这种方法属于数论中的无穷递降方法.

二　如图附—9，在$\triangle ABC$中，P、Q、R将其周长三等分，且P、Q在A、B边上，求证：$\dfrac{S_{\triangle PQR}}{S_{\triangle ABC}}>\dfrac{2}{9}$.



（图附—9）



（图附—10）

证法一：在AB上取Q'点（如图附—10），使 $AQ'=PQ$，

则 $AQ'=PQ=\frac{1}{3}(AB+BC+CA)>\frac{1}{3}(AB+AB)=\frac{2}{3}AB$，

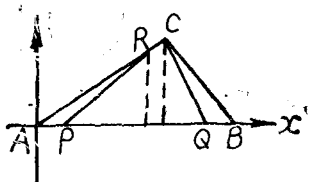
且 $AP<AB-PQ<\frac{1}{3}AB$.

于是
$$
\begin{aligned}
AR&=(AP+AR)-AP\\
&=\frac{1}{3}(AB+BC+CA)-AP\\
&>\frac{1}{3}(AB+BC+CA)-\frac{1}{3}AB\\
&>\frac{1}{3}AC.
\end{aligned}
$$

因此，
$$
\frac{S_{\triangle PQR}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{S_{\triangle AQ'R}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{\frac{1}{2}AR\cdot AQ'\sin A}{\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin A}
$$

$$
>\frac{\frac{1}{3}AC\cdot\frac{2}{3}AB}{AB\cdot AC}=\frac{2}{9}.
$$

证法二：取坐标系如图附—11所示．设$\triangle ABC$的三边长为a，b，c，各点的坐标为：$A(0, 0)$，$P(p, 0)$，$Q(q, 0)$，$B(c, 0)$，$C(x_c, y_c)$，$R(x_R, y_R)$。



（图附—11）

由题设　$PQ = q - p = \frac{1}{3}(a + b + c)$，

$$AR = PQ - AP = q - p - p = q - 2p,$$

又　$\frac{y_R}{y_C} = \frac{AR}{AC} = \frac{q - 2p}{b}$，

$$S_{\triangle PQR} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & p & 0 \\ 1 & q & 0 \\ 1 & x_R & y_R \end{vmatrix} = \frac{1}{2}y_R(q - p),$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & c & 0 \\ 1 & x_C & y_C \end{vmatrix} = \frac{1}{2}cy_C.$$

则　$\frac{S_{\triangle PQR}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{y_R(p - q)}{cy_c} = \frac{(q - 2p)(q - p)}{bc}$.

而　$q < c < \frac{1}{2}(a + b + c) = \frac{3}{2}(q - p)$，

故　$3p<q$，即 $q-2p>\frac{1}{2}(q-p)$，

因而　$\frac{S_{\triangle PQR}}{S_{\triangle ABC}}>\frac{(q-p)^2}{2bc}=\frac{2}{9}\cdot\frac{(a+b+c)^2}{4bc}$

$$>\frac{2}{9}\cdot\frac{(b+c)^2}{4bc}\geqslant\frac{2}{9}.$$

三(35分)　在坐标平面上，是否存在一个含有无穷多条直线l_1、l_2，…，l_n，…的直线族，它满足条件：

(1) 点$(1,\ 1)\in l_n$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$，

(2) $K_{n+1}=a_n-b_n$，其中K_n是$l_n(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$的斜率，$a_n$和$b_n$分别是$l_n$在$x$轴和$y$轴上的截距；

(3) $K_nK_{n+1}\geqslant 0$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

并证明你的结论。

证明：满足条件(1)、(2)、(3)的直线族不存在。

事实上，假设这族直线存在，由(1)知l_n的方程为 $y-1=K_n(x-1)$。分别令$x=0$，$y=0$，解得

$$a_n=1-\frac{1}{K_n},\quad b_n=1-K_n,$$

则　$K_{n+1}=a_n-b_n=K_n-\frac{1}{K_n}$　　(＊)

由此可见$K_n\neq 0$　$(n=1,\ 2,\ \cdots)$，

因为　$K_nK_{n+1}\geqslant 0$，故所有K_n同号。不妨设一切$K_n>0$，再由(＊)知$K_{n+1}<K_n$。这样，数列$\{K_n\}$是一个单调下降且有下界的数列，故$\lim\limits_{n\to\infty}K_n=l$存在。把(＊)式改写为

$$K_nK_{n+1}=K_n^2-1.$$

再令$n\to\infty$，两边取极限得$l^2=l^2-1$，即$0=-1$，这是不可能的。

对$K_n<0(n=1,2,\cdots)$的情况可类似讨论。

这就证得满足(1)、(2)、(3)的直线族不存在。

注：在上述证明中，若不用单调数列的极限定理，得(*)后，有

$$K_{n+1}-K_n=-\frac{1}{K},K_n-K_{n-1}=-\frac{1}{K_{n-1}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots,K_2-K_1=-\frac{1}{K_1}.$$

以上各式相加，得

$$K_{n+1}=K_1-\left(\frac{1}{K_1}+\frac{1}{K_2}+\cdots+\frac{1}{K_n}\right)$$

$$<K_1-\left(\frac{1}{K_1}+\frac{1}{K_1}+\cdots+\frac{1}{K_1}\right)=K_1-\frac{n}{K_1}.$$

由此可见，当n充分大(如$n>K_1^2$)时，有$K_{n+1}<0$，与所设矛盾。

美国第47届普特南(大学生)数学竞赛试题选解

美国第47届普特南大学生数学竞赛于1986年12月6日举行，试题分一、二试各6题，每试的前两题为初等数学题，现将这四道试题的解答附录如下。

题A—1. 求出并证明$f(x)=x^3-3x$的最大值，其中x为任意实数，满足$x^4+36\leqslant 13x^2$。

解： 因$x^4+36\leqslant 13x^2$，所以$(x^2-4)(x^2-9)\leqslant 0$。

解得$-3\leqslant x\leqslant -2$或$2\leqslant x\leqslant 3$。

此时，$f(x)-f(y)=(x^3-y^3)-3(x-y)=(x-y)\cdot$

$$(x^2+xy+y^2-3)\geqslant 0.$$

若$x\geqslant y$，x，y同位于区间$[-3,\ -2]$或$[2,\ 3]$中，所以所求$f(x)$的最大值为

$$M=max(f(-2),\ f(3))=max(-2,\ 18)=18.$$

题A—2. 求出$\left[\dfrac{10^{20000}}{10^{100}+3}\right]$的个位数字。这里$[x]$是不大于$x$的最大整数。

解： 令$10^{100}=n$，则

$$A=\left[\frac{10^{20000}}{10^{100}+3}\right]=\left[\frac{n^{200}}{n+3}\right]$$

$$=\left[\frac{n^{200}-3^{200}}{n+3}+\frac{3^{200}}{n+3}\right].$$

因$n+3$整除$n^{55}+3^{25}$，故整除$n^{50}-3^{50}$，从而整除$n^{200}-3^{200}$，同时$3^{200}=9^{100}<n+3$，所以

$$A=\frac{n^{200}-3^{200}}{n+3}=\frac{n^{200}-81^{50}}{n+3}.$$

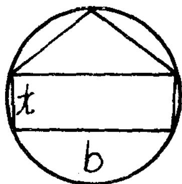
显然，A的分母的个位数字为 3，分子的个位数字为$10-1=9$，因而A的个位数字为3.

题B—1. 如图附—12.

单位圆有一内接矩形(底为b高为h)，以及一个等腰三角形(底为b)。问h为什么值时，矩形和三角形面积相同？

解：等腰三角形的高易见为

$$h_1=1-\frac{h}{2}.$$



(图附—12)

令 $\left(1-\frac{h}{2}\right)\frac{b}{2}=hb,$

便有 $h=\frac{2}{5}$,这便是所求的值.

题B—2. 证明：满足方程组

$$x(x-1)+2yz=y(y-1)+2zx=z(z-1)+2xy$$

的三元数组$T=(x-y,\ y-z,\ z-x)$(x、y、z为复数)仅有有限多个. 求出所有这种三元数组.

证明：由$x(x-1)-y(y-1)=2zx-2yz$,

$$(x-y)(x+y-1)=2z(x-y),$$

$$(x-y)(x+y-2z-1)=0.$$

令 $x-y=a$，$y-z=b$，$z-x=c$，则原方程组可写为

$$a(b-c-1)=0 \quad (1)$$

$$b(c-a-1)=0 \quad (2)$$

$$c(a-b-1)=) \quad (3)$$

若a，b，c中至少有两者为0，则第三者必为0，得T的一个解(0，0，0)；

若a，b，c中恰有一个为0，如$a=0$，则$c=1$，$b=-1$，得T的三个解(0，-1，1)，(1，0，-1)，(-1，1，0)；

若a，b，c均不为0，则$a-b=b-c=c-a=1$，三式相加得$0=3$，引出矛盾.

综上所述，可知T有四个解：(0，0，0)、(0，-1，1)，(1，0，-1)，(-1，1，0).

附录五

高中各年级数学竞赛赛前模拟试题

一 年 级

一、选择题 （本题满分42分，每个小题7分）

本题共有6个小题。每个小题都有代号为（A）、（B）、（C）、（D）的四个答案，其中有一个且只有一个答案是正确的。请把你认为正确的那个答案的代号写在题后的括号内。每个小题答对得7分，答错得0分，不答记1分。

1．设P是这样的命题："若数n的各位数字之和能被6除尽，则n能被6除尽。"使命题P不成立的n的一个值是

（A）30，（B）33，（C）40，（D）42．　　答（　　）

2．设$M=\{a|a=x^2-y^2,\ x、y\in z\}$，则

（A）属于M的两个整数，其积不属于M，

（B）一切奇数不属于M；

（C）偶数$4k-2$　（$k\in z$）不属于M；

（D）$M=\Phi$。　　答（　　）

3．边长为5的菱形，它的一条对角线的长不大于6，另一条不小于6，则这个菱形两条对角线长度之和的最大值是

（A）$10\sqrt{2}$，（B）14，（C）$5\sqrt{6}$，（D）12。

答（　　）

4．设x，y，z为非负实数，且满足方程

$4^{\sqrt{5x+9y+4z}}-68\times 2^{\sqrt{5x+9y+4z}}+256=0$。

那么$x+y+z$的最大值与最小值的乘积等于

(A) $\frac{4}{9}$，(B) 4，(C) 9，(D) 36.　　　答(　　).

5．已知函数$f(x)=ax^2-c$满足：$-4\leqslant f(1)\leqslant -1$，$-1\leqslant f(2)\leqslant 5$，那么$f(3)$应满足：

(A) $-7\leqslant f(3)\leqslant 26$，(B) $-4\leqslant f(3)\leqslant 15$，

(C) $-1\leqslant f(3)\leqslant 20$；　(D) $-\frac{28}{3}\leqslant f(3)\leqslant\frac{35}{3}$.

答(　　).

6．已知一个圆锥及其内切球，且这个球又内切于一个直圆柱，圆锥与圆柱的底面在同一个平面上，用V_1，V_2分别表示圆锥与圆柱的体积．则V_1、V_2之间的关系是

(A) $V_1<V_2$，(B) $V_1>V_2$，(C) $V_1=V_2$，(D) 以上答案都不对　　答(　　)。

二、填空题　(本题满分28分，每个小题 7 分)

本题共有 4 个小题，每个小题的答案请填在____上。

1．已知集合$M=\{x, xy, \lg(xy)\}$及$N=\{0, |x|, y\}$，并且$M=N$，那么$\left(x+\frac{1}{y}\right)+\left(x^2+\frac{1}{y^2}\right)+\left(x^3+\frac{1}{y^3}\right)+\cdots+\left(x^{2001}+\frac{1}{y^{2001}}\right)$的值等于____.

2．设$a_n=\sin^n\theta+\cos^n\theta(n\in N)$，则$6a_{10}-15a_8+10a_6$的值等于____.

3．给定半径均为R的四个球，其中每个球都与其余三个球外切．第五个球面包围着这四个球，并与这四个球相切．第六个球在上述四球的中间，并与它们外切．则第六个球的

体积V_6与第五个球的体积V_5之比等于____.

4. 假设x表示一个八位数. 如果使它与它的各位数字之和的比达到最大值，则x等于____.

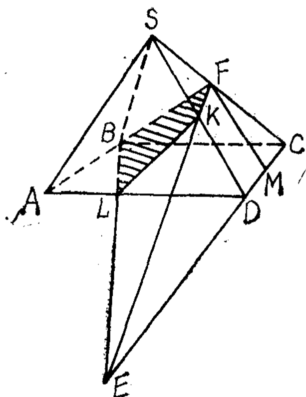
三、(满分16分)

有三根长度都为l的火柴(粗细略去不计)，随意放置在一张桌面上，使得每两根都相交，顺次连接火柴端点，形成一个六边形.

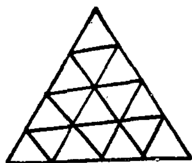
求证：这个六边形至少有一边的长度不小于$\frac{l}{2}$.

四、(满分17分)

一个正四棱锥$S-ABCD$,延长其底面的一边CD，截取线段$DE=2CD$(图附—16)，经过B、E和棱SC的中点F作一个平面，此平面将四棱锥分成两部分，求这两部分体积之比.



(图附—16)



(图附—17)

五、(满分17分)

把正三角形划分成n^2个同样的小正三角形(如图附—

17)，把这些小正三角形的一部分标上号码1，2，…，m，并且号码相邻的三角形有相邻边。

证明： $m\leqslant n^2-n+1$。

二 年 级

一、选择题 （满分42分，每小题7分）

说明同一年级(略)。

1．数集$P=\{(2n+1)\pi|n\in Z\}$与数集$Q=\{(4k\pm 1)\pi|k\in Z\}$之间的关系是

（A）$P\subset Q$，（B）$P\supset Q$，（C）$P=Q$，（D）$P\neq Q$。

答（　　）。

2．有m、n两个四位数。n的常用对数是$A+\lg B$，其中A、B为自然数；m的千位数字与百位数字之和等于$5B$；n比m大$11B$，那么

（A）$m=1978$，$n=2000$，（B）$m=2967$，$n=3000$，

（C）$m=3956$，$n=4000$，（D）$m=4945$，$n=5000$。

答（　　）。

3．已知等腰$\triangle ABC$的底边BC及高AD的长都是整数，那么$\sin A$和$\cos A$中：

（A）一个是有理数，一个是无理数；

（B）两个都是有理数；

（C）两个都是无理数；

（D）是有理数或无理数要根据BC和AD的数值来定。

答（　　）。

4．方程$\sin x=\lg x$的实根个数是

(A) 1，(B) 2，(C) 3，(D) 大于3。　　答(　　)。

5．如果四面体的每一个面都不是等腰三角形，那么其长度不等的棱的条数最少为

(A) 3，(B) 4，(C) 5，(D) 6。　　答(　　)。

6．在正方形$ABCD$所在平面上有点P，使$\triangle PAB$，$\triangle PBC$，$\triangle PCD$，$\triangle PDA$都是等腰三角形．那么，具有这样性质的点P的个数共有

(A) 9个，(B) 17个．(C) 1个，(D) 5个．答(　　)。

二、填空题　(满分28分，每小题7分)

1．一个公园的形状是边长为2公里的正六边形．小李从一个角顶出发沿着公园的周边步行5公里，这时她离出发点____公里。

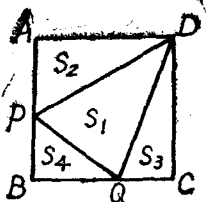
2．在同一路线上有四个人：第一人坐汽车，第二人开摩托车，第三人乘轻骑，第四人骑自行车．各种车的速度是固定的．坐汽车的在12时追上乘轻骑的，14时遇到骑自行车的，而与开摩托车的相遇时是16时．开摩托车的遇到乘轻骑的是17时，并在18时追上了骑自行车的．那么骑自行车的在____时遇见乘轻骑的．

3．要求在坐标平面内构造一个直角三角形，使得它的两条直角边分别平行于x轴和y轴，且两条直角边上的中线分别落在直线$y=3x+1$和$y=mx+2$上．使这样的三角形存在的常数m有____个．

4．在黑板上写下数1，2，…，1986，1987．每次允许抹去若干个数，同时又写下这些数之和除以7的余数．这样进行若干次后，黑板上剩下两个数，其中之一是987，则另一个数是____．

三、（满分16分）

在正方形 $ABCD$ 的边 AB、BC上分别取点 P、Q，连接 DP、DQ、PQ，分别记$\triangle DPQ$，$\triangle DAP$ $\triangle DQC$和$\triangle PBQ$的面积为S_1、S_2、S_3、S_4（图附-27）。问点P、Q如何选取时，$S_1^2+S_2^2+S_3^2+S_4^2$取最小值？



（图附-27）

四、（满分17分）

将2^n个球分成若干堆，任选甲、乙两堆按以下规则挪动：若甲堆的球数p不少于乙堆的球数q，则从甲堆拿q个球放到乙堆里去，这样算是挪动一次。求证：可以经过有限多次挪动把所有的球合并成一堆。

五、（满分17分）

有幂函数若干个，每个函数至少具有下面三条性质之一：(1) 是奇函数；(2) 是$(-\infty, +\infty)$内的增函数；(3) 函数的图象经过坐标原点。已知具有性质(1)的共12个，具有性质(2)的共10个，具有性质(3)的共14个。试问这些幂函数共有几个？其中幂指数小于零的有几个？

三 年 级

一、选择题 （满分42分，每小题 7 分）

说明同一年级（略）。

1．设$-1<a<0$，$\theta=\arcsin a$，那么不等式$\sin x<a$的解集为

(A) $\{x \mid 2n\pi+\theta<x<(2n+1)\pi-\theta,\ n\in Z\}$，

(B) $\{x \mid 2n\pi-\theta<x<(2n+1)\pi+\theta,\ n\in Z\}$,

(C) $\{x \mid (2n-1)\pi+\theta<x<2n\pi-\theta,\ n\in Z\}$,

(D) $\{x \mid (2n-1)\pi-\theta<x<2n\pi+\theta,\ n\in Z\}$.

答(　　)。

2. 在平面直角坐标系中，纵横坐标均为有理数的点称为有理点。若a为无理数，则过点$(a, 0)$的所有直线中

(A) 有无穷多条直线，其中每条直线上至少存在两个有理点；

(B) 恰有$n(2\leqslant n<+\infty)$条直线，其中每条直线上至少存在两个有理点；

(C) 有且仅有一条直线至少通过两个有理点；

(D) 每条直线至少通过一个有理点。　　答(　　)。

3. 对所有满足$1\leqslant m\leqslant n\leqslant 5$的$m$、$n$，极坐标方程

$\rho=\dfrac{1}{1-C_m^n\cos\theta}$表示的不同双曲线的条数是

(A) 15，(B) 10，(C) 7，(D) 6。　　答(　　)。

4. 设$0<a<1$，若$x_1=a$，$x_2=a^{x_1}$，$x_3=a^{x_2}$，…，$x_n=a^{x_{n-1}}$，…，则数列$\{x_n\}$

(A) 是递增的，　　(B) 是递减的，

(C) 奇数项是递增的，偶数项是递减的，

(D) 偶数项是递增的，奇数项是递减的。

答(　　)。

5. 已知方程$\arccos\dfrac{4}{5}-\arccos\left(-\dfrac{4}{5}\right)=\arcsin x$，则

(A) $x=\dfrac{24}{25}$，　(B) $x=-\dfrac{24}{25}$，

(c) $x=0$,　　(D) 这样的x不存在。答(　　)。

6．若四面体的一条棱长是x，其余棱长都是1，体积是$F(x)$，则函数$F(x)$在其定义域上

(A) 是增函数，但无最大值；

(B) 是增函数且有最大值；

(C) 不是增函数且无最大值；

(D) 不是增函数但有最大值.　　　　　　答(　　)。

二、填空题（满分28分，每小题7分）

1．在△ABC中，角A、B、C的对边分别为a，b，c。若角A、B、C的大小成等比数列，且$b^2-a^2=ac$，则角B的弧度数等于____。

2．设a，b，c，d是实数.假定$z^4+az^3+bz^2+cz+d=0$的所有根是复数，且落在复平面上以$0+0i$为中心，1为半径的圆周上。那么这些根的倒数之和必定是____。

3．递增数列1，3，4，9，10，12，13…由一些正整数组成，它们或者是3的幂，或者是若干个不同的3的幂的和。则此数列的第100项(其中1是第一项，3是第2项，等等)是____。

4．五对孪生兄妹参加K个组的活动。若规定：(1)孪生兄妹不在同一组；(2)非孪生关系的任意两个人都恰好共同参加过一个组的活动；(3)有一个人只参加两个组的活动。则K的最小值是____。

三、(满分16分)

求证： $1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)\leqslant\left(\frac{3n+1}{4}\right)^n$.

四、(满分17分)

两个人轮流在桌面上(矩形、正方形或圆形)摆硬币，每次摆一个，各个硬币不能互相重叠，也不能有一部分在桌面的边缘以外。这样经过充分多次以后，谁先摆不下硬币为输。试证先摆的人有办法使对方一定输。

五、(满分17分)

三角形的面积由三条边长唯一确定。问：四面体的体积是否由四个面的面积唯一确定？若唯一确定，请证明之；若不能唯一确定，则举例说明。

参 考 解 答

一 年 级

一 选择题

1. 本题虽然简单，却比较别致。参赛者如果粗心大意，则易选错答案，特别可能误答(C)。这里，命题P是"若A则B"的形式，当且仅当A真B假时，命题P不成立，故应选答(B)。其它，如(A)是A假B真，(C)是A、B同假，(D)是A、B同真，均不能使命题P不成立。

2. 设a、$b\in M$，则

$$a=x_1^2-y_1^2,\ b=x_2^2-y_2^2\qquad(x_1、x_2、y_1、y_2\in Z)$$

从而 $ab=(x_1x_2-y_1y_2)^2-(x_1y_2-x_2y_1)^2$.

显然有 $ab\in M$。故(A)不真；

又因任一奇数 $2k-1=k^2-(k-1)^2$，故(B)假；

若 $4k-2\in M$，则 $4k-2=x^2-y^2\quad(x,\ y\in Z)$.

或 $(x+y)(x-y)=2(2k-1)$.

因此，$x+y$与$x-y$必有一个是偶数，另一个是奇数.由于方程组

$$\begin{cases}x+y=2p\\x-y=2q-1\end{cases}\quad 或\quad \begin{cases}x+y=2q-1\\x-y=2p\end{cases}\ (p、q\in z)$$

均无整数解，此与x、y为整数相矛盾。故$4k-z\notin M$。由此应选答案(C)。

3. 设对角线长是$2x$和$2y$，则$x^2+y^2=5^2$，且$x\leqslant3$，$y\geqslant3$。由图附-13，可见$x+y\leqslant3+4$，所以$2x+2y$的最大值是14。因而应选答案(B)。

4．首先解出

$t = 2^{\sqrt{5x+9y+4z}}$。

由　$x^2 - 68t + 256 = 0$，

解得　$t_1 = 64 = 2^6$，

$t_2 = 4 = 2^2$。

对t_1有 $\sqrt{5x+9y+4z} = 6$，

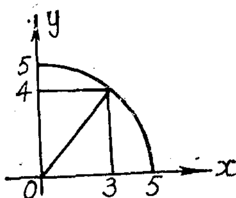


图　附—13

$$4(x+y+z) \leqslant 5x+9y+4z = 36 \leqslant 9(x+y+z).$$

得　$A = (x+y+z)_{极小值} = 4$，

$B = (x+y+z)_{极大值} = 9$；

对t_2有 $\sqrt{5x+9y+4z} = 2$，

$$4(x+y+z) \leqslant 5x+9y+4z = 4 \leqslant 9(x+y+z),$$

得　$C = (x+y+z)_{极小值} = \frac{4}{9}$，

$D = (x+y+z)_{极大值} = 1$。

于是最大值为 9，最小值为$\frac{4}{9}$，其积为$BC = 4$，因而应选答案(B)。

5．思考一．因$f(1) = a - c$，$f(2) = 4a - c$，

所以 $a = \frac{1}{3}[f(2) - f(1)]$，　$c = \frac{1}{3}[f(2) - 4f(1)]$，

从而　$f(3) = 9a - c = \frac{8}{3}f(2) - \frac{5}{3}f(1)$.

但　$\frac{8}{3}\times(-1) - \frac{5}{3}\times(-1) \leqslant \frac{8}{3}f(2) - \frac{5}{3}f(1) \leqslant \frac{8}{3}$

$\times 5-\frac{5}{3}(-4)$

则　$-1\leqslant f(3)\leqslant 20$，故应选答案(C)。

思考二、由题设知

$$\begin{cases}-4\leqslant a-c\leqslant -1\\ -1\leqslant 4a-c\leqslant 5\end{cases}\qquad (*)$$

令　$f(3)=mf(1)+nf(2)$，

即　$m(a-c)+n(4a-c)=9a-c$。

则　$\begin{cases}m+4n=9\\ m+n=1\end{cases}$，解得　$\begin{cases}m=-\frac{5}{3}\\ n=\frac{8}{3}\end{cases}$.

由(＊)得

$$\begin{cases}\frac{5}{3}\leqslant -\frac{5}{3}a+\frac{5}{3}c\leqslant \frac{20}{3}\\ -\frac{8}{3}\leqslant \frac{32}{3}a-\frac{8}{3}c\leqslant \frac{40}{3}\end{cases}$$

于是有　$-1\leqslant 9a-c\leqslant 20$

即　$-1\leqslant f(3\ \leqslant 20$，故选答案(C)

思考三、由题设知

$$\begin{cases}-4\leqslant a-c\leqslant -1\\ -1\leqslant 4a-c\leqslant 5\end{cases}$$

若以a为自变量，c为函数，上述不等式在直角坐标系中的图象，应是下列四条直线的内部(包括边界)的点(a,c)如图附－14。

$a-c=-1$　$a-c=-4$　$4a-c=5$　$4a-c=-1$

其交点为$A(0,1)$，$B(2,3)$，$C(3,7)$，$D(1,5)$。

显然　$0\leqslant a\leqslant 3$，$1\leqslant c\leqslant 7$。

则　$a_{最大}=3$，　$a_{最小}=0$，

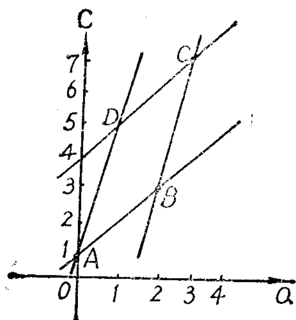
　　$c_{最大}=7$，　$c_{最小}=1$。

由　$f(3)=9a-c$，得$c=9a-f(3)$。

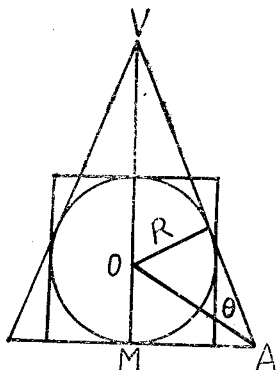
此式图象为斜率是9，截距是$-f(3)$的一束平行线，而截距$-f(3)$在$A(0,1)$、$C(3,7)$处取得最小值和最大值。

故　$f(3)_{最小}=9\times 0-1=-1$，$f(3)_{最大}=9\times 3-7=20$。

由此可得$-1\leqslant f(3)\leqslant 20$，因而应选答案(C)。



（图附—14）



（图附—15）

6。设$VM=h$为圆锥的高，r为底面半径，R为内切球半径，O为球心（图附—15），则$\angle MAO=\angle OAV=\theta$，于是

$$R=r\mathrm{tg}\theta,\quad h=r\mathrm{tg}2\theta.$$

则$V_1=\dfrac{1}{3}\pi r^2h=\dfrac{1}{3}\pi r^3\mathrm{tg}2\theta$，

$$V_2=2\pi R^3=2\pi r^3\mathrm{tg}^3\theta,$$

于是，$\frac{V_1}{V_2}=\frac{\text{tg}2\theta}{6\text{tg}^3\theta}=K>0$。

因为 $\text{tg}2\theta=\frac{2\text{tg}\theta}{1-\text{tg}^2\theta}$，

所以 $\text{tg}^4\theta-\text{tg}^2\theta+\frac{1}{3K}=0$。

$$\Delta=1-\frac{4}{3K}\geqslant 0$$

故 $K\geqslant\frac{4}{3}>1$，因而$V_1>V_2$，应选(B)。

二、填空题

1．因为$M=N$，所以$O\in M$，且x，y均不能为0，于是$\lg(xy)=0$，$xy=1$。

从而，$1\in N$。若$y=1$，必$x=1$，这与集合元素的互异性矛盾，故只能$|x|=1$且$x=-1$，得$y=-1$。

因此，$x+\frac{1}{y}=-2$，$x^2+\frac{1}{y^2}=2$，$x^3+\frac{1}{y^3}=-2$，…，

$x^{2000}+\frac{1}{y^{2000}}=2$，$x^{2001}+\frac{1}{y^{2001}}=-2$。

显然，所求和之值为-2。

2．因为$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，记$\sin\theta=p$，$\cos\theta=q$，则$p^2+q^2=1$。

另知 $a_6=1-3p^2q^2$，$a_4=1-2p^2q^2$。

$$a_8=a_6-a_4p^2q^2=1-4p^2q^2+2p^4q^4,$$

$$a_{10}=(p^8+g^8)(p^2+q^2)-p^2q^2(p^6+q^6)$$
$$=1-5p^2q^2+5p^4q^4.$$

则 $6a_{10}-15a_8+10a_6=1$。

即所求之值等于1．

3．由题意知题中所指半径为R的 四 个球 的球心恰是棱长为$2R$的正四面体的四个顶点，又易知第五球、第六球的球心都是上述正四面体的重心．设r表第五球（大球）的半径，p表第六球的半径，显然有

$$r=p+2R \quad (1)$$

又因棱长为$2R$的正四面体的 重心到 它的 每个顶点的距离都等于$\frac{\sqrt{6}}{2}R$，故 有 $p+R=\frac{\sqrt{6}}{2}R$。

即 $$p=R\left(\frac{\sqrt{6}}{2}-1\right) \quad (2)$$

将(2)代入(1)得 $r=R\left(\frac{\sqrt{6}}{2}+1\right)$。

于是 $\frac{V_5}{V_6}=\left(\frac{P}{r}\right)^3=\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\right)^3=(5-2\sqrt{6})^3$.

4．假设x表示一个八位数，由此可令

$$x=a_8\cdot10^7+a_7\cdot10^6+\cdots+a_2\cdot10+a_1,$$

则 $$q=\frac{a_8\cdot10^7+a_7\cdot10^6+\cdots+a_2\cdot10+a_1}{a_8+a_7+\cdots+a_2+a_1}$$

$$\leqslant\frac{10^7(a_8+a_7+\cdots+a_2+a_1)}{a_8+a_7+\cdots+a_2+a_1}=10^7$$

（当$a_1=a_2=\cdots=a_7=0$时取等号）

因而，$x=10000000$。

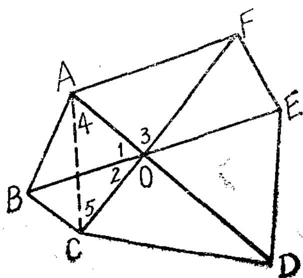
三、分两种情况证明之：

(1) 若三根火柴交于一点O(图附－18)。

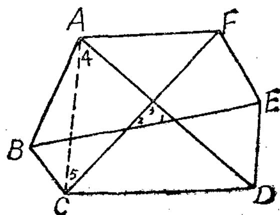
因$\angle 1+\angle 2+\angle 3=180°$，

则其中定有一个角不小于60°，设$\angle 3\geqslant 60°$。

又$\angle 3=\angle 4+\angle 5$，则有$\angle 4+\angle 5\geqslant 60°$。



(图附—18)



(图附—19)

因而$\angle 4$与$\angle 5$中定有一个不小于30°，设$30°\leqslant\angle 4\angle 60°$，由正弦定理有：

$$CD=AD\cdot\frac{\sin\angle 4}{\sin\angle ACD}\geqslant\frac{1}{2}l.$$

(2) 若三根火柴交于三点(图附－19)。

设$\angle 4\geqslant 30°$，由正弦定理有

$$CD=\frac{AD\sin\angle 4}{\sin\angle ACD}\geqslant\frac{1}{2}l.$$

四、设顶点为F，底面是$Rt\triangle BCE$的三 棱锥 的 体积为V_1，(图附－16)

$$S_{\triangle BCE}=\frac{1}{2}BC\cdot CE=\frac{3}{2}a^2.$$

因为F是棱SC的中点，所以

$$V_1=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}a^2\cdot\frac{h}{2}=\frac{1}{4}a^2h.$$

设三棱锥$K—LED$的体积为V_2，

则 $$\frac{LD}{BC}=\frac{ED}{EC},$$

于是 $$\frac{LD}{a}=\frac{2a}{3a},\quad \text{即有} LD=\frac{2}{3}a.$$

在侧面SCD内作$FM \parallel SD$，则有

$$\frac{KD}{FM}=\frac{ED}{EM}.$$

设$SD=b$，得 $$\frac{KD}{\frac{1}{2}b}=\frac{2a}{\left(2+\frac{1}{2}\right)a},\quad KD=\frac{2}{5}b.$$

$$V_2=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}a\cdot 2a\right)\cdot\frac{2}{5}h=\frac{4}{45}a^2h.$$

多面体$BFCDKL$的体积 $V_3=V_1-V_2=\frac{29}{180}a^2h.$

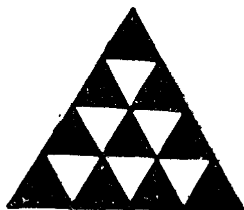
正四棱锥$S-ABCD$的体积$V_0=\frac{1}{3}a^2h.$

因此，多面体$SALKFB$的体积

$$V_4=\frac{1}{3}a^2h-\frac{29}{180}a^2h=\frac{31}{180}a^2h$$

所以 $\frac{V_4}{V}=\frac{31}{29}$.

五、研究如图附—20所画出那样的三角形。这时黑三角形有$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$个；而白三角形有$1+2+3+\cdots+(n-1)=\frac{1}{2}n(n-1)$个。



（图附-20）

显然，两个有相邻号码的三角形涂有不同颜色，因此标号码的黑三角形仅能比白三角形多1．因而，编号的三角形数不超过

$$2\cdot\frac{n(n-1)}{2}+1=n^2-n+1.$$

即 $m\leqslant n^2-n+1$.

二 年 级

一、选择题

1．思考一、选择K的一些特殊值，进而作出正确判断．事实上，

令$K=0$，1，2，3，即$(4K\pm1)\pi$分别为$-\pi$，π，3π，5π，7π，9π，11π，13π，与数集P进行比较．推知$P=Q$，故选答案(C)。

思考二、通过对奇数$2n+1$的变形进行论证，事实上，令$n=2m$，$(m\in Z)$，则$(2n+1)\pi=(4m+1)\pi$。

令$n=2m-1$，则$(2n+1)\pi=(4m-1)\pi$。

因而$P=Q$，选择答案(C)。

思考三、从命题的答案的等价性进行分析判断。事实上，

因若$P\subset Q$，则$P\neq Q$。

于是，若$P\subset Q$正确，则$P\neq Q$也正确，这是不可能的，因此，(A)是错误的。

同理，(B)也是错误的。

由于(D)与(A)、(B)中有一组是类同的，因而(D)也是不正确的。

于是 $P=Q$，选择答案(C)。

注：思考一的解法虽不严密，但也可进行判断，所以取特殊值是一种常用方法；思考二较自然，论证也较为严密；思考三较巧妙，思维有一定的深度。

2. 因为m的千位数字与百位数字之和一定不大于18，所以$5B\leqslant 18$，而B为自然数，则$0<B\leqslant 3$。

由题设有 $\lg n=A+\lg B$，$n=B\cdot 10^A$，$A=3$。

又因$n>m\geqslant 1000$，则$B\neq 1$，B只能为2或3。

若$B=3$，则$n=3000$，$n-m=11B=33$，$m=2967$，但千位数字与百位数字之和为11不等于$5B$。因而$B=3$不合题意。

若$B=2$，则$n=2000$，$n-m=11B=22$，$m=978$，$1+9=10=2B$。

因此，$m=1978$，$n=2000$。选答(A)

3. 设$AD=m$，$BC=2n$，则

$$AB=\sqrt{m^2+n^2}\qquad (m^2+n^2\neq 0),$$

$$\cos\frac{A}{2}=\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}},\quad \sin\frac{A}{2}=\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}},$$

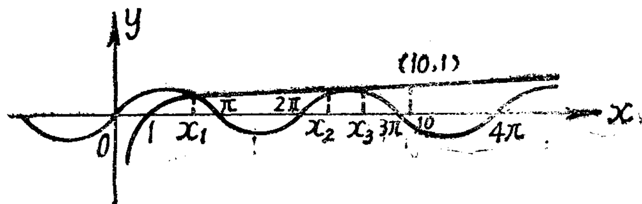
故 $$\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=\frac{2mn}{m^2+n^2},$$

$$\cos A=\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}=\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}.$$

由题设知m、n都是有理数，所以$\sin A$、$\cos A$也都是有理数，从而应选答案(B)。

4. 考虑曲线$y=\sin x$与$y=\lg x$的交点个数。如图附—21所示。

因$y=\lg x$是一个单调递增函数，故在$x>10$时，$\lg x>1$，与$y=\sin x$不再相交；而在$0<x<10$时，如图附—21显然有3个交点，因此应选答案(C)。

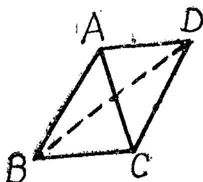


(图附—21)

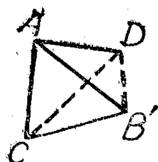
5. 长度不等的棱显然不能少于3条，因为每一个面上的三条棱就是各不相等的。那么，是否可能恰有三条不相等的棱呢？如果可能，就一定要相对的棱分别相等。

事实上，两个全等的不等边锐角三角形可以拼成一个平

行四边形$ABCD$（图附—22），三角形公共边AC是四边形的对角线，比另一条对角线BD短。把$\triangle ABC$绕AC旋转$180°$到



（图附—22）



（图附—23）

$AB'C$的位置，那么$ACB'D$是等腰梯形，而$AC>B'D$（图附—23）。因此，在旋转过程中必有$BD=AC$的时候，这时四面体$ABCD$就恰有3条不相等的棱。所以，本题的正确答案是(A)。

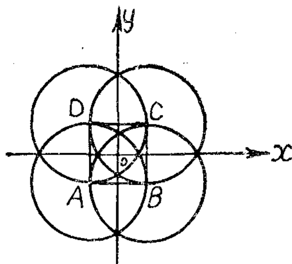
6。与AB构成等腰三角形的点的轨迹由三部分构成：

(1) AB 的中垂线；

(2) A为中心，AB为半径的圆；

(3) B为中心，AB为半径的圆。

因此，由画出的图附—24可见，共有9个点适合条件，所以应选答案(A)。



（图附—24）

注：一些参赛者由于把"到A、B等距离"与"同AB构成等腰三角形"误认为是等价的，因而产生一个错误命题："同线段AB构成等腰三角形的点必在AB的中垂线上"，并据此错

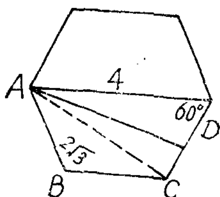
误命题就极易误选答案(C)。

二、填空题

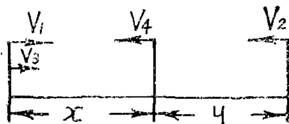
1. 如图附一25所示，$ABCD$是所走路线，$AD^2=1^2+4^2-2\cdot1\cdot4\cos60^\circ=13$

或 $AD^2=1^2+(2\sqrt{3})^2=13$。

因此，小李这时离出发点有$\sqrt{13}$公里。



(图附—25)



(图附—26)

2. 设汽车、摩托车、轻骑、自行车的速度分别为V_1、V_2、V_3，V_4。x、y分别表示在12时的时候骑自行车的与坐汽车的、骑自行车的与开摩托车的之间的距离，依题意得

$$x=2(V_1+V_4) \quad (1)$$

$$x+y=4(V_1+V_2) \quad (2)$$

$$x+y=5(V_2+V_3) \quad (3)$$

$$y=6(V_2-V_4) \quad (4)$$

我们的目的是求$\frac{x}{V_3+V_4}$，所以要从(1)至(4)中消去y，V_1，V_2。为此，由((1)+(3))×2-((2)+(4))得

$$3x=10(V_3+V_4),$$

即 $x=\frac{10}{3}(V_3+V_4)$。

设骑自行车的在t时遇见乘轻骑的，则

$$x=(t-12)(V_3+V_4),$$

则 $t-12=\frac{10}{3}$，即$t=15\frac{1}{3}$。

所以骑自行车的在15时20分遇见乘轻骑的。

3．设所求三角形的顶点为$A(h,\ k)$、$B(h+2a,\ k)$，$C(h,\ k+2b)$，则AB的中点是$M(h+a,\ k)$，AC的中点是$N(h,\ k+b)$。使题设两直线分别为CM、BN，则有

$$\begin{cases} k+2b=3h+1 \\ k=3(h+a)+1 \end{cases} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} k=m(h+2a)+2 \\ k+b=mh+2 \end{cases} \qquad (2)$$

由(1) 有 $2b=-3a$

由(2) 有 $b=-2am$.

从而$m=\frac{3}{4}$。

交换CM与BN的位置，则得m另一值。

综上可知满足要求的m值有 2 个。

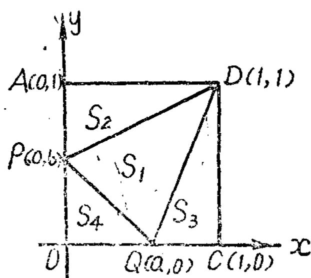
4．我们注意到，每经过一次“抹数”和写“余数”后，所有还写在黑板上的数之和除以 7 的余数不变。设最后余下的另一个数为x，则$x+987$与下列和数

$$1+2+3+\cdots+1986+1987=1987\cdot 7\cdot 142$$

分别除以 7 的余数相等，都等于 0 。又987能被 7 整除，因而数x能被 7 整除。因为每次抹数后，总要添上一个“余数”，所以最后剩下的数中至少有一个是“余数”。但987不是除以7后的余数，因此x必是除以 7 后的余数，即是说，有 $0\leqslant x\leqslant 6$

成立．由于所指出的x能被7整除，则$x=0$，即黑板上剩下的数除987外，就只有一数“0”了．

三、不妨设正方形$ABCD$的边长为1，如图附—28建立坐标系，设$P(0, b)$，$Q(a, 0)$，于是



（图附—28）

$$S_2=\frac{1}{2}(1-b),$$

$$S_3=\frac{1}{2}(1-a), \qquad S_4=\frac{1}{2}ab,$$

$$S_1=1-S_2-S_3-S_4=\frac{1}{2}(a+b-ab).$$

从而　$S_1^2+S_2^2+S_3^2+S_4^2$

$$=\frac{1}{4}\Big(1-2b+b^2+1-2a+a^2+a^2b^2+a^2+b^2+a^2b^2$$

$$+2ab-2a^2b-2ab^2)$$

$$=\frac{1}{2}\left(a^2+b^2-a-b+1+ab-a^2b-ab^2+a^2b^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{(b^2-b+1)a^2-(b^2-b+1)a+(b^2-b+1)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}(a^2-a+1)(b^2-b+1)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]\left[\left(b-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right] \qquad (*)$$

显然，$a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{2}$时，（*）式值最小，最小值为$\frac{9}{32}$.

即P、Q分别选线段为AB、BC的中点时，$S_1^2+S_2^2+S_3^2+S_4^2$取得最小值$\frac{9}{32}$。

四、当$n=1$时，总共只有两个球，若仅是一堆，则不必挪动；若分成两堆，则只需挪动一次就并成一堆了，故$n=1$时命题成立。

假设当$n=k$时命题成立，即2^K个球任意分成若干堆，总可经过有限次挪动并成一堆.

则当$n=k+1$时，2^{k+1}个球分成的各堆的球数可能是奇数，也可能是偶数，但奇数个球的堆数必是偶数(否则总球数将是奇数，与已知矛盾).把所有奇数个球的堆任意两两配合，在每两堆之间挪动一次，就使得各堆球数都是偶数，这时，总堆数不超过原来的堆数，且每堆都是偶数个球.于是，可把两个球看成一个大球，则有2^k个大球.

根据归纳假设，可以按规则把它们并成一堆.所以，原来的2^{k+1}个球也可以按规则并成一堆.

综上所述，命题得证.

五、设在这些幂函数中，具有性质(1)、(2)、(3)的组成集合分别记为A、B、C。幂指数小于零的组成集合记作D，各集合中的函数个数分别记作$n(A)$、$n(B)$、$n(C)$、$n(D)$。

则$n(A)=12$，$n(B)=10$，$n(C)=14$.

由幂函数的性质可知，在$(-\infty, +\infty)$内递增的函数一

定是奇函数，且图象一定过原点。所以

$$B \subseteq A,\ B \subseteq C。$$

又由幂函数的性质可知，若一个幂函数是奇函数，且图象过原点，那么一定在$(-\infty,\ +\infty)$内递增，因而$A \cap C = B$。

于是$n(A \cup B \cup C) = n(A \cup C)$

$$= n(A) + n(C) - n(A \cap C)$$

$$= n(A) + n(C) - n(B)$$

$$= 12 + 14 - 10 = 16.$$

因此，共有幂函数16个。

又因为幂指数小于零的幂函数的图象一定不经过原点，所以

$$n(D) = n(A) - n(A \cap C) = n(A) - n(B) = 12 - 10 = 2.$$

即16个幂函数中有 2 个幂指数小于零的幂函数。

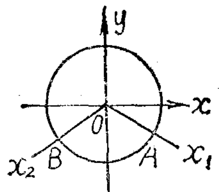
三　年　级

一、选择题

1。思考(一)、先解方程：$\sin x = a$。得

$$x_1 = 2n\pi + \theta,\ x_2 = (2n-1)\pi - \theta.$$

描在单位圆上，A，B 把单位圆分成两段。为了确定哪段为所求，只须取一个特殊值。如$x=0$，有$\sin 0 = 0 > a$。所以原不等式的解不包括 $x_0 = 0$，即图附—29中劣弧AB 为所求，这就是(D)。



（图附—29）

思考(二)、由于$\sin x<a<0$，所以x只能在三、四象限内．又取$n=0$时，各选择支为

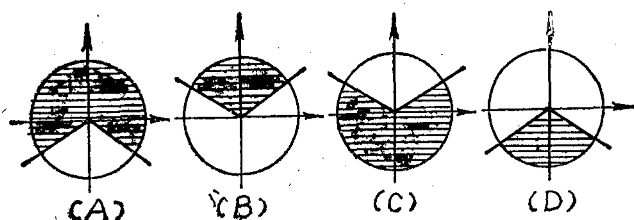
(A) $\theta<x<\pi-\theta$,　　包括$x=0$；

(B) $-\theta<x<\pi+\theta$，包括$x=\frac{\pi}{2}$；

(C) $-\pi+\theta<x<-\theta$，包括$x=0$.

均有不在第三、四象限上的点，因而都应否定，唯有(D)真．

思考(三)、把四个选择支所对应的解集合表示在单位圆上(图附—30)



(图附—30)

(A) $\begin{cases}\sin x>a\\ a<0\end{cases}$　(B) $\begin{cases}\sin x>a\\ a>0\end{cases}$　(C) $\begin{cases}\sin x<a\\ a>0\end{cases}$

(D) $\begin{cases}\sin x<a\\ a<0\end{cases}$

可见(D)真。

2. 思考(一)、显然，x轴通过$(\alpha, 0)$点，且x轴上至少通过两个有理点，应排除(D)。

假设另有一条斜率为$k(k\neq 0)$的直线上至少存在两个有理点，不妨设(x_1, y_1)和(x_2, y_2)，则x_1，x_2，y_1，y_2都是有

理数且$y_1\neq 0$，$x_1\neq x_2$。然而一方面由$k=\dfrac{y_1-a}{x_1-a}$不是有理数，另一方面由$k=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$是有理数，从而得出矛盾。所以，$(x_1, y_1)$和$(x_2, y_2)$不能都为有理点。

又当直线斜率不存在时，直线$x=a$上不存在有理点。但当$k=0$时，过点$(a, 0)$的直接$y=0$（x轴）上有无穷多个有理点。

综上可知应选(C)。

思考(二)、过点$(a, 0)$的直线方程是$y=k(x-a)$或$x=a$，除$k=0$时方程为$y=0$外，方程中总不能不含有无理数。而通过两个有理点的直线方程可以只含有有理数。所以，有且只有直线$y=0$至少通过两个有理点。因而应选答案(C)。

思考(三)、直线$y=0$至少通过两个有理点，过$(a,0)$的直线中仅此直线有此性质，因其它过$(a,0)$的直线$y=k(x-a)$ $(k\neq 0)$若过两个有理点(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，则$k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$为有理数，$a=x_1-\dfrac{y_1}{k}$为有理数，引出矛盾。因而应选答案(C)。

3．由圆锥曲线的统一极坐标方程

$p=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$，其中$e>1$时表示双曲线。

再由条件知　$e=C_m^n$。又$1\leqslant n\leqslant m\leqslant 5$。可取

$m=2$时，$e=C_2^1$；$m=3$时，$e=C_3^1=C_3^2$；

$m=4$时，$e=C_4^1=C_4^3$；或$e=c_4^2$；

$m=5$时，$e=C_5^1=c_5^4$；或$e=c_5^2=c_5^3$。

综上可知，这样的e的不同值可取6个，因而应选答案(D)。

4．可用特例排除反面．

设$x_1=a=\frac{1}{2}$，则$x_2=a^{x_1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}>\frac{1}{2}=x_1$，排除$(B)$。

$x_3=a^{x_2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=x_2$，排除$(A)$。

$$\frac{x_3}{x_1}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}}{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}-1}>\left(\frac{1}{2}\right)^0=1$$，即$x_3>x_1$，排除(D)。

综上便知应选答案(C)。

5．易知$\arccos\frac{4}{5}<\frac{1}{4}\pi$．再由原方程得

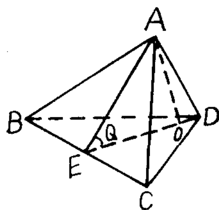
$\arcsin x<-\frac{1}{2}\pi$．这不可能．因而选择答案$(D)$．

注：解答本题易于产生如下错误：

一是可能想到余弦函数是偶函数，误认为$\arcsin x=0$得$x=0$，轻率地选择(C)。

二是有人可能设$\arccos\frac{4}{5}=\alpha$，正确地得到$\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)=\pi-\alpha$．但由$\arcsin x=\alpha-(\pi-\alpha)=2\alpha-\pi$又错误地得到 $x=\sin(2\alpha-\pi)=-\sin 2\alpha$

$=-2\sin\alpha\cos\alpha=(-2)\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)=-\frac{24}{25}$，从而误选答案($B$)。



（图附—31）

6。如图附—31．设想题设之四面体由两个有公共底边BC的边长为1的等边$\triangle ABC$和$\triangle BDC$，连顶点A、D而得．若底面$\triangle BCD$不动，当x变化时，顶头A绕着BC旋转，从而四面体V_{A-BCD}的体积发生变化．但这些四面体有公共底面$\triangle BCD$．所以

$$V=\frac{1}{3}hS_{\triangle BCD}．其中S_{\triangle BCD}=\frac{\sqrt{3}}{4}，而h=AO=AE\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta．$$

于是，$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{8}\sin\theta．$

在等腰$\triangle AED$中，$AE=ED=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$AD=x$．由余弦定理可求出

$\cos\theta=\frac{3-2x^2}{3}$，由$-1\leqslant\cos\theta\leqslant1$解出$0\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$．

$\theta=\arccos\frac{3-2x^2}{3}$．

当x从0增大到$\sqrt{3}$时，$\frac{3-2x^2}{3}$从1连续减小到-1，θ由

0°增大到180°，而$\sin\theta$则从0先增加到1，再减小到0；当θ取90°时，$V=\frac{1}{8}$，取得最大值．体积V先是增加的后来是减小的．

综上得知$F(x)$不是增函数但有最大值．因而应选答案(D)．

注：本题也可将$F(x)$的表达式先求出来：

$F(x)=\frac{1}{12}\sqrt{\frac{9}{4}-\left(x^2-\frac{3}{2}\right)^2}$再进行讨论．但这样作计算量较大。

二、填空题

1．因为所求的是角，所以要把$b^2-a^2=ac$转化为角之间的关系．由正弦定理得

$$\sin^2B=\sin^2A=\sin A\sin C$$

与　　$B^2=AC$及$A+B+C=\pi$，

消去A、C即得B．为此，先由

$$\begin{aligned}\sin A\sin C&=\sin^2B-\sin^2A\\&=\sin(B+A)\sin(B-A)\\&=\sin C\sin(B-A)．\end{aligned}$$

化简得　$\sin A=\sin(B-A)$，$A=B-A$，

$2A=B=\sqrt{AC}$，$4A=C$。

于是　$\pi=A+2A+4A=7A$，

则　　$A=\frac{\pi}{7}$，$B=\frac{2\pi}{7}$．

注：如果不知$\sin^2B-\sin^2A=\sin(B+A)\sin(B-A)$，就要把左边分解因式，再化正弦和差为积，然后用倍角公式

而得右边，这样做比较费时，不如作草图附—32，则 $ac=(b+a)(b-a)$

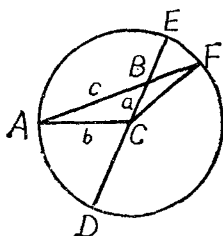
即 $BC\cdot BA=BD\cdot BE$

$=BA\cdot BF,$

则 $BC=BF,$

从而 $\angle A=\angle F=\angle BCF$

$=\frac{1}{2}\angle ABC$，即 $B=2A$。



（图附—32）

2．记方程左边为 $f(z)$，其根为 $z_k(k=1,2,3,4)$．按韦达定理有 $\sum_{k=1}^{4} z_k=-a$。

设 $\sum_{k=1}^{4} z_k=u+Vi$。因 $-a$ 是实数，所以 $u=-a, V=0$.

又因 $|z_k|=1$，于是 z_k 的倒数是共轭数 $\overline{z_k}$. 而 $\sum_{k=1}^{4}\overline{z_k}=\overline{\sum_{k=1}^{4} z_k}$ $=\overline{u+Vi}=u-Vi=-a$，因此，所求这些根的倒数之和必定是 $-a$。

3．由于这些正整数或者是 3 的幂，或者是若干个不同的 3 的幂的和，所以将这些数写成三进制数时，各位上都不会出现2．下表是把1，3，4，9，10，12，13…改写成三进制后的形式

a_n	1	3	4	9	10	12	13	…
三进制的 a_n	1	10	11	100	101	110	111	…

从上表看出，如果把这些三进制数看作为二进制数，再化为十进制数就分别得到连续的自然数1，2，3，4，5，6，7，….根据这一规律，要求原数列中的第100项，只要把100写成二进制数，再把这个二进制数看作为三进制数，最后把这个三进制数改写为十进制数就可以了．事实上，$100=64+32+4=2^6+2^5+2^2=1100100_{(2)}$，

$1100100_{(3)}=3^6+3^5+3^2=729+243+9=981$．

因此，原数列中的第100项是981．

4．设五对孪生兄妹为(A_1，B_1)，(A_2，B_2)，…，(A_5，B_5)．不妨设A_1只参加第1、2组的活动．则A_2，B_2，…A_5，B_5中每一人都和A_1一起恰好参加过第1组或第2组的活动，故不失一般性，可设A_2，A_3，B_4，A_5参加第1组活动，B_2，B_3，B_4，B_5参加第2组活动．

A_2必须和B_3，B_4，B_5恰好共同参加过一个组的活动．由于B_3，B_4，B_5已一起参加第2组运动，故A_2必须分别在三个组和B_3，B_4，B_5一起活动；同理A_3，A_4，A_5也必须分别在三个组分别和B_2，B_4，B_5；B_2，B_3，B_5；B_2，B_3，B_4一起活动．这些组必然各不相同，共有12组．

B_1可以参加有A_2，B_3；A_3，B_4；A_4，B_5；A_5，B_2的四个组，这样便满足了(1)、(2)、(3)的要求，即知k的最小值为14．

另解：设只参加两个组的那个人是R，他所参加的两个组是A、B．除R和他的孪胞以外，还有8个人，每个人都要和R共同参加一个组，当然只能参加A组或B组．其中没有孪生关系的4个人参加A组，他们各自的孪胞参加B组．又A组里除R外的每个人还要和B组里除他的孪胞和R外的每个人分别共同参加一个组，这些组既不是A、B，又彼此不同(否

则会有两个人共同参加的组不止一个，违反题设），所以除A、B外还该有$4\times3=12$个组、至于R的孪胞也要和除R外的其他每个人分别恰好共同参加一个组，这就只要让他参加刚才所说12个组中的四个组就可以了。（例如参加R_1R_2'，R_2R_3'，R_3R_4'，R_4R_1'所在的组，其中Ri与Ri'是孪生兄妹）因此，组数k的最小值是 $2+12=14$。

再解、设五对孪生兄妹为A_1，B_1；A_2、B_2；A_3、B_3；A_4 B_4；A_5，B_5。

按题意，设A_1只参加两个组的活动，且由条件(1)、(2)所限，不妨设为$(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$和$(B_1, B_2, B_3, B_4, B_5)$（此外$Ai$与$Bi$可对换，$i=2$、3、4、5）。

再考虑B_1参加的组，由条件(1)、(2)及k尽量小，可得(B_1, A_2, B_3)，(B_1, A_3, B_2)，(B_1, A_4, B_5)，(B_1, A_5, B_4)。

最后再考虑条件(2)和(1)，得到其它组的情况为(B_2, A_4)，(B_2, A_5)，(B_3, A_4)，(B_3, A_5)，(B_4, A_2)，(B_4, A_3)，(B_5, A_2)，(B_5, A_3)。

由上可见，满足条件(1)、(2)、(3)的k的最小值为14。

三：因为$1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)=\dfrac{(2n)!}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}$

$$=\frac{(2n)!}{2^n\cdot n!}=\frac{1}{2^n}(n+1)(n+2)\cdots(n+n).$$

由平均值不等式有

$$\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}\leqslant\frac{1}{n}[(n+1)+(n+2)+\cdots+(2n)]$$

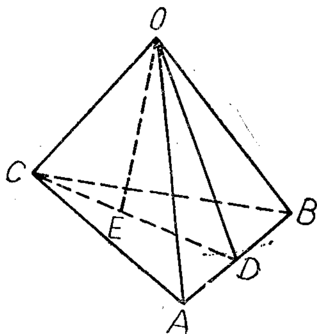
$$=\frac{[(n+1)+(2n)]n}{2n}=\frac{3n+1}{2}$$

所以$1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{3n+1}{2}\right)^n$.

四、设先摆的人称为甲，后摆的人称为乙．甲可以把第一个硬币摆在桌的中心，由于桌面为中心对称图形，以后不管乙把硬币摆在哪里，甲总可以把硬币摆在与乙所摆硬币（关于中心）的对称的地方．这样，只要乙有地方摆得上，甲总可以摆得下．这样的摆法就能使后摆的人一定输．

五、答案是否定的．

如图附—33．



（图附—33）

在四面体 $O-ABC$ 中．

$CA=CB=OA=OB$,

$OC=AB$

易证其四个面为全等的四个三角形．设每个面的面积为S．取AB中点D连CD、OD，则$CD\perp AB$、$OD\perp AB$、作$OE\perp$平面ACB于E，则E必在OD上．

令$OE=h$，$CD=OD=a$，$\angle ACB=2\theta=\angle AOB$.

在$\triangle ACB$中，$AD=a\operatorname{tg}\theta$，$S=a^2\operatorname{tg}\theta$.

在$\triangle OCD$中，$OC=AB=2a\operatorname{tg}\theta$．由余弦定理，可得

$\cos\angle OCD=\operatorname{tg}\theta$。

则　$h=OC\sin\angle OCD=2a\operatorname{tg}\theta(\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\theta})$.

于是．$V_{O-CAB}=\frac{1}{3}hs=\frac{2}{3}S^{\frac{3}{2}}\sqrt{\text{tg}\theta(1-\text{tg}^2\theta)}$

从而，当S一定时，体积V随θ的变化而不同．即是说，四面体的体积不能由它的四个面的面积唯一确定．

附录六

第30届IMO简况

（1） 简况

第30届国际数学奥林匹克（IMO）于1989年7月16日至7月24日在高斯的故乡，西德的布伦瑞克举行，这次竞赛共有50个国家参加，日本等4国派出了观察员．经过激烈角逐，中国队在参赛国中异军突起，一举夺得团体总分第一名．六名同学获得4枚金牌，2枚银牌．其中

罗华章42分（满分）	霍小明41分
蒋步星41分	俞　扬41分
唐若曦37分	颜华菲35分

（38—42分为金牌，30—37分为银牌，18—29分为铜牌）

总分居前十位的国家为

1.中国	237	2．罗马尼亚	223
3.苏联	217	4．东德	216
5.美国	207	6．捷克斯洛伐克	202
7.保加利亚	195	8．西德	187
9.越南	183	10.匈牙利	175

（2） 第30届IMO试题

第一天（布伦瑞克，1989,7,18）

1．求证：集合$\{1,2,\cdots,1989\}$可以分为117个互不相交

的子集$Ai(i=1,2,3,\cdots,117)$使得

(1) 每个Ai含有17个元素；

(2) 每个Ai中各元素之和相同.

2. 锐角三角形ABC中，A角的等分线与三角形的外接圆交于另一点A_1.点B_1、C_1与此类似，直线AA_1与B、C两角的外角等分线相交于A_o. 点B_o、C_o与此类似. 求证：

(1) 三角形$A_oB_oC_o$的面积是六边形$AC_1BA_1CB_1$面积的二倍；

(2) 三角形$A_oB_oC_o$的面积至少是三角形ABC面积的四倍.

3. 设n和K是正整数，S是平面上n个点的集合，满足：

(1) S中任何三点不共线；

(2) 对S中的每一个点P,S中至少存在K个点与P距离相等.求证$K<\frac{1}{2}<\sqrt{2n}$.

第二天(布伦瑞克，1989,7,19)

4.设$ABCD$是一个凸四边形，它的三个边AB、AD、BC满足$AB=AD+BC$.四边形内,距离CD为h的地方有一点P使得$AP=h+AD$, $BP=h+BC$。

求证 $\frac{1}{\sqrt{h}}\geqslant\frac{1}{\sqrt{AD}}+\frac{1}{\sqrt{BC}}$.

5. 求证：对任何正整数n，存在n个相继的正整数,它们都不是素数的整数幂.

6. 设n是正整数. 我们说集合$\{1,2,\cdots,2n\}$的一个排列$(x_1,x_2,\cdots,x_{2n})$具有性质P，如果在$\{1,2,\cdots,2n-1\}$当中至

少有一个i使$|x_i - x_{i+1}| = n$成立。求证：对于任何n，具有性质P的排列比不具有性质P的排列个数多。

注：试题详细解答请看：

（1）《数学通报》1989年10期；

（2）《中等数学》1989年5期（天津市数学学会、天津师范大学数学系主办）。

（3） 第30届IMO预选题说明

各国向30届IMO共提供了107道试题（我国提交的试题由于某种原因，组织委员会未能收到），选题委员会从中初选出32道题供主试委员会决定。这些题可以列成一个简表：

编号	提供国	难度	知识范畴
1*△	澳大利亚	B	平面几何、不等式
2	澳大利亚	C-	数论
3	澳大利亚	B	数论
4	保加利亚	B-	多项式、数论
5	哥伦比亚	B	多项式（不等式）
6	捷克斯洛伐克	B	平面几何、不等式
7	芬兰	B	平面几何
8*	法国	A	组合几何、不变量
9	法国	A	数论、多项式
10	希腊	C-	复数、函数方程
11	匈牙利	A	数论、组合
12*	匈牙利	B-	组合
13*△	冰岛	C-	平面几何

14	印　　度	A_+	平面几何
15	爱 尔 兰	C_-	数论
16	以 色 列	B_+	数论、不等式
17	蒙　　古	C	组合几何
18	蒙　　古	C	平面几何
19*	蒙　　古	C_+	组合
20*△	荷　　兰	A	组合几何、不等式
21	荷　　兰	B	立体几何
22△	菲 律 宾	C_{--}	组合
23△	波　　兰	A_{++}	组合
24*	波　　兰	B_+	立体几何
25*	南 朝 鲜	A	数论
26	南 朝 鲜	C	不 等 式
27	罗马尼亚	B	数　　论
28	罗马尼亚	B_+	平面几何、不等式
29	罗马尼亚	A	组　　合
30*△	瑞　　典	B_-	数　　论
31	瑞　　典	A	数论、不等式
32	美　　国	C	平面几何

其中＊表示选题委员会看中的题，△表示主试委员会最后选定的6道试题．在正式试卷上，这6道题的顺序是：1．(22题)，2．(1题)，3．(20题)，4．(13题)，5．(30题)，6．(23题)．

*A*表示最难的题，*B*表示中等，*C*表示容易．但这只是选题委员们的主观看法，未必准确．例如第22题，需要构造出合乎要求的子集(命题委员会把其中的17改为117以增加难度)．虽不算难题，但也未见得十分容易．第23题，并非过难，事实上很多学生的解答都远比原先提供的解答简单．

附录七

1989年亚洲太平洋地区数学竞赛简况及试题

首届亚洲太平洋地区数学竞赛于1989年3月14日举行。

这一竞赛的目的是为了发现、鼓励亚太地区的有数学才能的学生，促进这一地区师生的国际交往与合作。竞赛的时间定在每年三月的第二个星期内。虽然有统一的考题，但不需要将选手集中，在各自的地区分开考试，可以节省许多经费。

试题共5道，时间为4小时，每道题7分。组织、选题、发奖等大致与国际数学奥林匹克相同。

目前参加这一竞赛的有澳大利亚、加拿大、新加坡和香港。预计1990年会有更多的国家（地区）参加，其中包括中国。

下面是这一届的试题

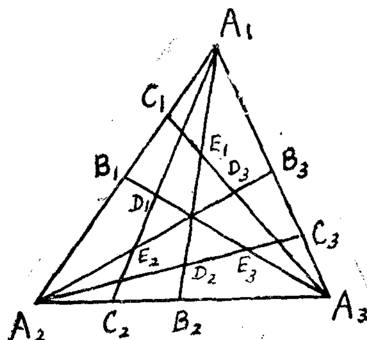
1．设$x_1, x_2, \cdots, x_n$为正实数。令

$$s = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

证明：$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \leqslant 1 + s + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^3}{3!} + \cdots + \frac{s^n}{n!}$。

2．证明方程 $6(6a^2+3b^2+c^2)=5n^2$除去$a=b=c=n=o$外无正整数解。

3. A_1、A_2、A_3为平面上三点．为方便起见，约定$A_4 = A_1$，$A_5 = A_2$．对于$n = 1,2,3$，令B_n为A_nA_{n+1}的中点，C_n为A_nB_n的中点，A_nC_{n+1}与B_nA_{n+2}交于D_n．A_nB_{n+1}与C_nA_{n+2}交于E_n．求$\triangle D_1D_2D_3$与$\triangle E_1E_2E_3$面积之比．



（图附—34）

4. S为m个正整数对$(a,b)$$(1\leqslant a<b\leqslant n)$所成的集．证明至少有$4m\cdot\dfrac{m-\dfrac{n^2}{4}}{3n}$个三元数组$(a,b,c)$使得$(a,b)$，$(a、c)$与$(b、c)$都属于$S$（译注：$(a、b)$与$(b、a)$被认为是相同的）．

5. 求所有从实数集到实数集的、满足下列条件的函数f：

（1）$f(x)$严格增加；

（2）对所有实数x，$f(x)+g(x)=2x$，这里$g(x)$是$f(x)$的反函数。

注：详细解答请看《数学通报》1989年第12期。

附录八　**中国数学学会普及工作委员会关于中学数学竞赛命题范围等问题的通知**

（一九八九年六月三十日）

中国数学会普及工作委员会九位常委在济南参加了数学竞赛命题研讨会，讨论并同意了会上提出的关于命题范围等问题的意见，现将普委会常委会的决定通知如下：

1．命题范围　都以初、高中数学教学大纲为准。

在初中联赛，还要考二次函数、二次不等式、一元一次不等式组的内容，平面几何考到“圆”这一章为止。

在高中联赛，不考微积分、概率、向量、函数方程。高中联赛第二试包括平面几何内容。

第一试都着眼于基本知识和基本技能的考查，第二试对能力的测定有较高的要求。

2．考试时间　初中一试一小时，二试一个半小时；高中一试2小时，二试2小时。

3．考试题型　初中一试选择题8道，填空题4道，二试大题三道（其中几何综合题、代数综合题、杂题各一道）。

高中一试选择题6道，填空题6道，其他大题3道；二试大题三道。

4．考试分数　初中一试总分80分，其中选择题每题6分，填空题每题8分；初中二试总分60分，其中每题20分，二试中试题得分为4分一档，即每题只设0、4、8、12、16、20六

个不同的得分点，初中一、二两试总分为140分。

高中一试总分120分，其中选择题每题5分，填空题每题5分，大题每题20分；二试总分105分，其中每题35分，二试中试题得分为5分一档，即每题只设0、5、10、15、20、25、30、35八个不同的得分点。

以上意见，至少三年不变。

编　后　记

本书的初中部分出版后，纷纷接到读者来信，认为很有特色，有骨有肉，有一定的开放性和可读性。当前，国内对这方面尚无成型的著作，此书的问世，是一份探索性的产物，受到全国各地许多学校的青睐。

近年来，在广大中小学教师的努力下，四川省的数学普及工作和数学竞赛不断取得好成绩．每年大约有数十万高中、初中、小学学生参加群众性的各种级别的数学竞赛活动．在省内各级开展课外数学活动的组织——数学兴趣小组、数学奥林匹克学校相继建立，在不加重学生负担的原则下，积极开展各种有意义、有成效的活动，为国家培养出一大批优秀中、小学生．例如他们中的杰出代表何宏宇（四川彭县中学）是第29届国际数学奥林匹克（简称IMO）满分金牌获得者；罗华章（四川重庆永川中学）在第30届国际数学奥林匹克竞赛上又以满分获得金牌；唐若曦（成都树德中学）获得银牌．

1989年7月我国派出六名中学生到联邦德国的布伦瑞克（*Gauss*的故乡）参加第30届国际数学奥林匹克，获得四枚金牌、二枚银牌．在50个参赛国中，我国名列第一，为社会主义祖国争光，为四川争光。

明年（1990年）我国要承办第31届国际数学奥林匹克竞赛，1992年四川省要承办全国初中数学竞赛，我们这套教材的

出版正好赶上了这个时机，让它能为各级各类学校提供一分有价值的学习材料。

本书的作者有长期从事这方面工作的实践经验，经常在四川各地举办的培训班上讲课，积累了大量第一手材料，编成的这套材料内容丰富，把方法和题材熔为一体，灵活多变，举一反三。作者在书中提出的“三化”(即将问题具体化，特殊化，简单化)“四想”(即联想、猜想、推想、异想)等别开生面的有效办法，使人耳目一新。

由于数学奥林匹克竞赛试题所涉及的知识面较广，不仅有传统的内容，而且还有不少近现代的新知识，所以本书作者又在如何扩大知识面，如何作好参赛准备，如何沉着应战力争优异成绩方面，提出了许多颇有战略眼光的分析，对于广大数学爱好者都是很有价值的。

1989年12月

奥林匹克数学竞赛解谜

高中部份

康纪权



西南师范大学出版社